

LEÇONS

D'ALGÈBRE

CONFORMES

AUX PROGRAMMES OFFICIELS DE L'ENSEIGNEMENT DES LYCÉES

PAR CHARLES BRIOT,

MAITRE DE CONFERENCES A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

DEUXIÈME PARTIE,

A L'USAGE

DES ÉLÈVES DE LA CLASSE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

SIXIÈME ÉDITION.



PARIS.

DUNOD, ÉDITEUR,

SUCCESSEUR DE VICTOR DALMONT,

Précédemment Carilian-Gœury et Vor Dalmont,

LIBRAIRE DES CORPS IMPÉRIAUX DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES,

49, Quai des Augustins, 49.

1868



CHEZ DUNOD, ÉDITEUR

Précédemment Carilian-Gœury et Victor Dalmont,

libraire des corps impériaux des ponts et chaussées et des mines,

49, Quai des Augustins, à Paris.

ANNÉE SCOLAIRE 1867-1868.

NOUVEAUX OUVRAGES.

PHYSIQUE. COURS ÉLÉMENTAIRE DE PHYSIQUE, précédé de notions de mécanique et suivi de problèmes; par **A. Boutan**, *proviseur du lycée Saint-Louis*, et **J. Ch. d'Almeida**, *professeur de physique au lycée Napoléon*; 3e édition, revue et augmentée, avec 800 figures environ et un spectre solaire intercalée dans le texte. 2 vol. grand in-8. Prix : 12 fr.

CHIMIE. COURS ÉLÉMENTAIRE DE CHIMIE; par **H. Debray**, *professeur au lycée Charlemagne*; avec nombreuses figures intercalées dans le texte, 2e édition. 1 fort vol. grand in-8 et planches. Prix : 7 fr.

ARITHMÉTIQUE. PRÉCIS D'ARITHMÉTIQUE à l'usage des candidats aux Ecoles polytechnique, Saint-Cyr, forestière, navale, et des aspirants au baccalauréat ès sciences et autres grades des Facultés; par **Ch. Simon**, *professeur de mathématiques au Lycée Louis-le-Grand*. In-8. Prix : 3 fr. 50 c.

MÉCANIQUE. LEÇONS DE MÉCANIQUE conformes aux programmes de l'enseignement des lycées et de l'admission aux écoles spéciales; par **Ch. Simon**, *professeur de mathématiques au lycée Louis-le-Grand, docteur ès sciences, etc.* 1 vol. in-8, avec figures. Prix : 3 fr. 50 c.

THÉORÈMES ET PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE, avec leur démonstration et leur solution raisonnée; ouvrage destiné à tous les aspirants au baccalauréat et aux Ecoles du gouvernement; par **E. Catalan**, *docteur ès sciences, agrégé de l'Université, professeur à l'Université de Liége, etc.* 4e édition, refondue et considérablement augmentée. 1 beau vol. in-8, avec 17 planches. Prix : 7 fr. 50 c.

COSMOGRAPHIE. COURS DE COSMOGRAPHIE, OU ÉLÉMENTS D'ASTRONOMIE, comprenant les matières du *nouveau programme* arrêté pour l'enseignement des lycées; par **Ch. Briot**, *maître de conférences à l'École normale, etc.* 4e édition. 1 beau vol. grand in-8, avec bois gravés dans le texte et imprimé avec le plus grand soin. 1867. 6 fr.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE. COMPLÉMENT DE LA GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE de **MM. Briot** et **Bouquet**. Leçons faites par M. Briot, à l'École normale supérieure, et rédigées par ses élèves. Un beau volume grand in-8 avec 120 figures dans le texte. Prix : 5 fr.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE ET GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE. DÉVELOPPEMENTS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE; par M. **Th. Olivier**, *ancien élève de l'École polytechnique et ancien officier d'artillerie, docteur ès sciences de la Faculté de Paris; professeur de géométrie descriptive au Conservatoire impérial des Arts et Métiers; professeur-fondateur de l'École centrale des Arts et Manufactures, répétiteur à l'École polytechnique*; suivi de NOTES DE GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE, par M. **J. A. Serret**, *membre de l'Institut, professeur à la Faculté des sciences*. 1 vol. in-4, avec Atlas. Prix : 18 fr.

DESSIN D'ORNEMENTS. **Ruprich-Robert**, *architecte du gouvernement, professeur de composition d'ornement à l'École impériale de dessin, architecte dessinateur du mobilier de la couronne*. FLORE ORNEMENTALE. 1 fort vol. grand in-4 colombier de texte, et légendes, avec 150 l. grav. par Sauvageot. 125 fr.

OUVRAGES RELATIFS A L'ENSEIGNEMENT SCIENTIFIQUE.

ARITHMÉTIQUE. COURS D'ARITHMÉTIQUE, suivi des notions élémentaires d'algèbre; ouvrage rédigé d'après l'instruction générale sur l'exécutinn du plan d'études des lycées impériaux, et contenant les énoncés de 560 prnblèmes, dnnt les données ont été prises dans des publicatinns officielles; par **Ch. Leclsek**, *ancien élève de l'Ecole polytechnique, professeur au lycée de Versailles*. In-12. 2 fr. 50 c.

Cet ouvrage est tout à fait conforme à l'esprit et à la lettre du plan d'études des lycées. Il contient toutes les questions d'arithmétiqus et d'algèbre traitées dans la classe de troisième (section des sciences), et eet terminé par nne série de 17 tableaux extraits des publications *officielles* sur la population, l'agriculture et l'indnstrie. Conformément à l'instruction générale sur le nouveau plan d'études, les 560 problèmes que l'auteur y énonce, reposent snr des données réelles et non sur des nombres srbitraires.

ALGÈBRE. LEÇONS D'ALGÈBRE, à l'usage des candidats au baccalauréat ès sciences et aux écoles spéciales, *entièrement conformes aux programmes* arrêtés pour l'enseignement des lycées et l'admission aux écoles spéciales; par **Ch. Briot**, *professeur de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, docteur ès sciences, maître de conférences à l'École normale supérieure, etc.* Nouvelle édition, 2 vol. in-8, fig. (*ensemble*). 7 fr. 50 c.

La première partie, à l'usage des élèves de la classe de seconde et des candidats au baccalauréat ès sciences et aux Écoles de marine et de Saint-Cyr, précédée d'une introduction à l'usage des élèves de la classe de troisième. 6e édition, in-8, fig. (*seule*). 3 fr. 50 c.

La deuxième partie, à l'usage des élèves de mathématiques spéciales et des candidats aux Écoles polytechnique et normale supérieure. 4e éditinn. 1 vnl. in-8, fig. (*seule*) 4 fr. 50 c.

ÉQUATIONS. RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS TRANSCENDANTES; par le docteur **M. A. Stern**, *professeur à l'Université de Goettingue*. Ouvrage couronné par la Société des sciences de Danemark; traduit et annoté par **E. Lévy**, *agrégé des Sciences*. In-8 avec figures dans le texte. 1 fr. 75 c.

La résolution des équatione transcendantes est exigée pour l'admission à l'École polytecbnique. — C'est nne des théories mentionnées dans le Programme officiel.

Les Traités d'algèbre sont, à ce sujet, tout à fait insuffisants. — La publicatinn du travail remarquable u Dr STERN est nn véritable service rendu à l'enseignement.

GÉOMÉTRIE. ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE comprenant LA GÉOMÉTRIE PURE ET APPLIQUÉE; nuvrage conforme au uouveau programme et aux instructions ministérielles de 1854. 2 parties in-8 avec 442 figures dans le texte et 3 planches gravées; par **A. Eudes**, *professeur au lycée Napoléon*. 6 fr. 25 c.

On vend séparément :

La géometrie pure. 1 vol. in-8 avec 344 figures. 4 fr.

La géometrie appliquée. 1 vol. in-8 avec 98 figures et 3 planches gravées. 2 fr. 25 c.

La *Géométrie pure* est divisée en 7 livres suivis d'nn supplément sur les courbes usuelles; on y trouve une théorie du contact et de l'intersection des cercles dégagée de tont raisonnement par la réduction à l'abeurde, des démonstrations simplifiées sur la mesure des angles inscrits, sur les relations numériques entre les côtés d'un triangle, sur le rapport des aires des figures semblables, sur celui des volumes des polyèdres semblables, sur la snrface du tronc de cône, sur l'égalité des angles que forme soit la tangente à l'elllpse avec les rsyons vecteurs menés au point ds contact, soit la tangente à la parabole avec le rayon vecteur mené an point de contact et svec l'axe.

La *Géométrie* appliqnée contient les premières notiona eur le levé des plans, les projections et le nivellement. Dans un appendice eur les projectious, on a complété la partie de la géométrie descriptive qni concerne la ligue droite et le plan, en employant la métbode du cbangement de plans de projection appliquée seulement sn plan vertical; on y tronve comme exercics la construction générale des cadrans solaires et la manière de se servir de la projection d'un cube ponr projeter un ouvrage de charpeute, un banc, par exemple.

Les énoncés d'environ 200 problèmes et théorèmes accompagnés de numéros de renvoi aux diverses parties des *Eléments* auxquels ils se rapporteut, offrent aux élèves des sujets d'exercices faciles sur toutes ces parties.

TRIGONOMÉTRIE. LEÇONS DE TRIGONOMÉTRIE rectiligne et sphérique, à l'usage des candidats au baccalauréat ès sciences et aux Ecoles spéciales du gouvernement; par **Roguet**, *professeur*. 3e édition, revue avec soin et rédigée conformèment au programme officiel de l'enseignement scientifique des lycées. In-8, avec figures dans le texte. Paris. 2 fr. 25 c.

TRIGONOMÉTRIE. LEÇONS DE TRIGONOMÉTRIE rectiligne et sphérique, à l'usage des élèves des lycées et des candidats au baccalauréat et aux Ecoles spéciales; par **E. Rouché**, *ancien élève de l'Ecole polytechnique, professeur au lycée Charle-*

magne, et **L. Lacour**, *professeur au lycée Charlemagne*. 1 vol. in-8 avec figures tercalees dans le texte. 3 fr. 50 c.

Les seize premières leçons renferment les matières exigées pour l'admission au baccalauréat ès sciences, à l'Ecole navale et à l'Ecole de Saint-Cyr; les suivantes s'adressent aux élèves de mathématiques spéciales. Chaque chapitre contient, outre les exercices résolus, et imprimés en petit caractère, un grand nombre de questions énoncées que les élèves studieux s'exerceront utilement à résoudre. Les leçons qui traitent de l'usage des tables et de l'application de la trigonométrie au levé des plans ont été l'objet d'un soin particulier; dans la première, chaque règle est suivie d'un exemple qui en fixe le sens, et dans la seconde, des applications numériques nombreuses et variées permettent au lecteur d'acquérir cette habitude des calculs à laquelle on ne saurait attacher trop de prix. On trouvera enfin dans cet ouvrage des démonstrations simples et nouvelles des formules relatives à la réduction des arcs, de la formule de Lhuillier et du théorème de Legendre.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE. LEÇONS DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE à deux et à trois dimensions, à l'usage des candidats aux Ecoles polytechnique et normale, précédées d'une introduction renfermant les premières notions sur les courbes usuelles exigées des candidats au baccalauréat ès sciences; ouvrage entièrement conforme aux programmes de 1852 pour l'enseignement scientifique des lycées; par **Roguet**, *professeur*. 2e édition, revue et augmentée. 1 vol. in-8, avec lee figures dans le texte. 7 fr. 50 c.

ANALYSE. RÉSUMÉ DES LEÇONS D'ANALYSE données à l'Ecole polytechnique; par **Navier**, *membre de l'Institut, professeur d'analyse et de mécanique à l'Ecole polytechnique, etc.* 2e édition, revue et annotée par M. **Liouville**, *membre de l'Institut, etc.* 2 volumes in-8, avec planches. 10 fr.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE. TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE, renfermant toutes les matières exigées pour l'admission à l'Ecole polytechnique, le baccalauréat, etc.; par **E. Catalan**, *docteur ès sciences, agrégé de l'Université, etc.* Nouvelle édition, 2 parties in-8, avec atlas de 28 planches. 7 fr. 50 c.

Chaque partie se vend séparément :

1re *partie :* La ligne droite et le plan. 3e édition, in-8, avec atlas de 11 planches. 4 fr.
2e *partie :* Problèmes sur les surfaces, in-8, avec atlas de 17 planches. 4 fr.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE. TRAITÉ COMPLET DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE; par **Th. Olivier**, *docteur ès sciences, professeur de Géométrie descriptive au Conservatoire des arts et métiers, répétiteur à l'Ecole polytechnique, professeur-fondateur de l'Ecole centrale des arts et manufactures, etc.*; ouvrage divisé en plusieurs parties, qui se vendent chacune séparément :

1° COURS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE. 2e édition revue et augmentée; deux parties in-4, avec un atlas de 97 planches. 22 fr.

La 1re *partie :* Du point, de la droite et du plan. 2e édition, revue et augmentée. 2 vol. in-4, dont 1 de 43 planches.

Cette première partie contient tout ce qui est relatif à l'écriture et à la notation graphique, à la méthode du changement des plans de projection et à celle du mouvement de rotation; elle contient en outre les notions élémentaires sur les ombres, la perspective et les plans cotés.

La 2e *partie :* Des courbes et des surfaces courbes, et en particulier des sections coniques et des surfaces du second ordre. 2e édition. 2 forts vol. in-4, dont 1 de 54 planches. (Cette 2me partie se vend séparément.) 12 fr. 50 c.

La deuxième partie forme le traité le plus complet qui existe sur les courbes et sur les surfaces; tout y est démontré par les méthodes de projection, sans avoir recours à l'analyse.

2° ADDITIONS AU COURS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE; démonstration nouvelle des propriétés des sections coniques. In-4, avec 15 planches. 4 fr.

3° DÉVELOPPEMENTS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE avec un Appendice contenant divers Mémoires de géométrie supérieure; par **M. Serret**, *membre de l'Institut*. 2 vol. in-4, dont 1 de pl. 18 fr.

4° COMPLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE. 2 vol. in-4, dont 1 de pl. 18 fr.

5° MÉMOIRES DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE THÉORIQUE ET APPLIQUÉE. 2 vol. in-4, dont 1 de pl. 18 fr.

6° APPLICATION DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE aux ombres, à la perspective, à la gnomonique et aux engrenages. 2 vol. in-4, dont 1 de 58 pl. doubles, dont plusieurs coloriees ou à l'aqua-tinta. 25 fr.

Les *Développements*, les *Compléments* et les *Mémoires de géométrie descriptive* servent de complément à tous les traités de Géométrie descriptive publiés jusqu'à ce jour; ils renferment chacun des matières spéciales que n'a encore traitées aucun des auteurs qui ont écrit sur la géométrie descriptive.

La *géométrie descriptive*, comme le démontrent ces ouvrages, peut souvent atteindre à la puissance de l'*analyse*; elle y atteindra *en général* dans les questions où il s'agira de la *forme*, dans les problèmes de relation de position; et je serais bien trompé (*dit l'auteur*) si, pour ces problemes, elle n'avait presque toujours l'avantage sur l'*analyse*, en ce sens que ses démonstrations seront plus promptes et plus simples et que les résultats seront obtenus dans des termes plus immédiatement applicables par les ingénieurs aux travaux d'art.

La géométrie descriptive peut acquérir *toute puissance* lorsqu'il s'agira de relation de position; *en* ce sens elle n'est pas bornée, et les efforts qu'elle fera dans cette direction seront toujours utiles.

Paris. — Imprimé par E. Thunot et Ce, 26, rue Racine

LEÇONS

D'ALGÈBRE

Paris. — Imprimé par E. Thunot et Cᵉ, rue Racine, 26.

LEÇONS
D'ALGÈBRE

CONFORMES

AUX PROGRAMMES OFFICIELS DE L'ENSEIGNEMENT DES LYCÉES

Par Charles BRIOT,

MAÎTRE DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

DEUXIÈME PARTIE,

A L'USAGE

DES ÉLÈVES DE LA CLASSE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

SIXIÈME ÉDITION.

PARIS.

DUNOD, ÉDITEUR,

SUCCESSEUR DE VICTOR DALMONT,

Précédemment Carilian-Gœury et Vve Dalmont,

LIBRAIRE DES CORPS IMPÉRIAUX DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES,

49, Quai des Augustins, 49.

1868

OUVRAGES DU MÊME AUTEUR.

LEÇONS D'ARITHMÉTIQUE.

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE.

LEÇONS D'ALGÈBRE, première partie.

COURS DE COSMOGRAPHIE.

LEÇONS DE MÉCANIQUE.

LEÇONS DE TRIGONOMÉTRIE, par MM. Briot et Bouquet

LEÇONS DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE, par les mêmes.

COMPLÉMENT DES LEÇONS DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

THÉORIE DES FONCTIONS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES, et en particulier **DES FONCTIONS ELLIPTIQUES**, par les mêmes.

ESSAI SUR LA THÉORIE MATHÉMATIQUE DE LA LUMIÈRE, par M. Briot.

Les numéros marqués d'un astérisque ne font pas partie du programme d'admission à l'École polytechnique.

LEÇONS D'ALGÈBRE.

DEUXIÈME PARTIE.

LIVRE PREMIER.

COMPLÉMENT DE CALCUL ALGÉBRIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

DES NOMBRES INCOMMENSURABLES.

Définition.

1. Lorsqu'on veut mesurer une grandeur, on cherche une commune mesure entre cette grandeur et l'unité. Si, par exemple, la commune mesure est contenue 7 fois dans l'unité et 4 fois dans la grandeur que l'on veut mesurer, cette grandeur, étant égale à 4 fois la septième partie de l'unité, sera représentée par la fraction $\frac{4}{7}$.

Mais il peut arriver que la grandeur et l'unité n'admettent pas de commune mesure, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de grandeur, si petite qu'elle soit, contenue exac-

tement dans la grandeur et l'unité. Dans ce cas, on dit que la grandeur est *incommensurable*, et, comme il est impossible de la mesurer exactement, on se borne à une évaluation approximative. Imaginons l'unité partagée en un grand nombre de parties égales, par exemple en mille parties égales, et cherchons combien la grandeur à mesurer contient de ces parties; elle en contient, je suppose, 728, plus un reste plus petit que l'une des parties; la grandeur à mesurer, étant plus grande que $\frac{728}{1000}$, mais plus petite que $\frac{729}{1000}$, sera représentée par l'une ou l'autre de ces deux fractions, avec une erreur moindre que 1 millième.

Si l'on avait partagé l'unité en un million de parties égales, on aurait obtenu la mesure de la grandeur avec une erreur moindre que 1 millionième.

Le nombre fractionnaire qui mesure une grandeur incommensurable, avec une approximation aussi grande qu'on veut, s'appelle un *nombre incommensurable*.

2. Les racines des quantités qui ne sont pas puissances parfaites, donnent aussi naissance à des nombres incommensurables. Appelons A un nombre entier non puissance n^e parfaite (c'est-à-dire un nombre entier qui n'est pas la puissance n^e d'un nombre entier), et plus généralement une fraction ordinaire irréductible dont les termes ne sont pas des puissances n^{es} parfaites; je dis qu'il n'existe pas de nombre fractionnaire $\frac{a}{b}$ qui, élevé à n^e puissance, reproduise exactement A. En effet, la n^e puissance de la fraction $\frac{a}{b}$ est $\frac{a^n}{b^n}$; comme on peut supposer la fraction $\frac{a}{b}$ irréductible, c'est-à-dire les deux nombres a et b premiers entre eux, les deux puissances a^n et b^n seront aussi premières entre

elles et la fraction $\frac{a^n}{b^n}$ irréductible. On voit d'abord que cette fraction irréductible ne peut être égale à un nombre entier A. Elle ne peut non plus être égale à une fraction irréductible dont les termes ne sont pas des puissances parfaites; car deux fractions irréductibles ne sont égales que si elles ont leurs deux termes égaux respectivement; la fraction proposée aurait ainsi ses deux termes puissances parfaites, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Mais on peut trouver des nombres fractionnaires $\frac{a}{b}$ et $\frac{a+1}{b}$, qui ne diffèrent entre eux que d'une quantité aussi petite qu'on veut $\frac{1}{b}$ (b étant très-grand), et dont les n^{es} puissances comprennent A. Écrivons en effet la quantité proposée A sous sa forme

$$\frac{A \times b^n}{b^n},$$

et désignons par a le plus grand nombre entier dont la n^e puissance soit contenue dans $A \times b^n$; la quantité $A \times b^n$ étant comprise entre a^n et $(a+1)^n$, la quantité $\frac{A \times b^n}{b^n}$ ou A sera évidemment comprise entre

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n \quad \text{et} \quad \left(\frac{a+1}{b}\right)^n.$$

Chacun de ces nombres fractionnaires $\frac{a}{b}$ et $\frac{a+1}{b}$, dont la différence est aussi petite qu'on veut, et dont les puissances comprennent la quantité proposée A, est ce que l'on ap-

pelle la racine approchée de A; on la désigne par le symbole $\sqrt[n]{A}$.

Il est aisé de voir que ce nombre fractionnaire $\frac{a}{b}$ ou $\frac{a+1}{b}$ représente, avec une approximation aussi grande qu'on veut, une certaine grandeur incommensurable. Considérons en effet, d'une part, les nombres dont les n^{es} puissances sont inférieures à A; d'autre part, ceux dont les puissances sont supérieures à A, et imaginons les deux séries de grandeurs commensurables de même espèce représentées par ces nombres. Les grandeurs de la première série sont plus petites que celles de la seconde; la différence $\frac{1}{b}$ entre une grandeur $\frac{a}{b}$ de la première série et une grandeur $\frac{a+1}{b}$ de la seconde série peut être rendue aussi petite qu'on veut. On conçoit donc qu'entre ces deux séries de grandeurs commensurables il existe une grandeur incommensurable unique et déterminée, qui en est la limite commune; c'est cette grandeur incommensurable que représente le symbole $\sqrt[n]{A}$.

3. On a vu, en géométrie, plusieurs exemples de grandeurs incommensurables. Ainsi on a démontré que la diagonale d'un carré est incommensurable par rapport au côté pris pour unité: elle est représentée par le symbole $\sqrt{2}$. De même, la circonférence d'un cercle est incommensurable par rapport au diamètre pris pour unité; mais le nombre incommensurable qui mesure la circonférence ne peut, comme le précédent, être obtenu par des extractions de racines; on le désigne par la lettre π.

Calcul des nombres incommensurables.

4. Le calcul des nombres incommensurables n'offre aucune difficulté. Les nombres incommensurables n'étant autre chose que des nombres fractionnaires approchés, il est clair que les opérations portent sur ces nombres fractionnaires; le résultat sera lui-même un nombre fractionnaire approché, qui représentera, avec une erreur infiniment petite, une grandeur déterminée, en général incommensurable.

Addition. Supposons d'abord qu'il s'agisse d'additionner deux nombres incommensurables. Si l'on prend les deux nombres par défaut, puis par excès, on a une première somme plus petite que la seconde; d'ailleurs ces deux sommes diffèrent entre elles aussi peu qu'on veut; donc elles comprennent une grandeur déterminée, qu'elles représentent avec une approximation indéfinie. Cette grandeur est la somme des deux grandeurs incommensurables représentées par les nombres incommensurables proposés.

Soustraction. Il en est de même de la soustraction : si l'on prend le plus grand nombre par défaut, le second par excès, ou, réciproquement, le premier par excès, le second par défaut, on a une première différence plus petite que la seconde, et ces deux différences diffèrent entre elles d'une quantité aussi petite qu'on veut; donc elles comprennent une grandeur qu'elles représentent avec une approximation indéfinie. Cette grandeur est la différence des grandeurs incommensurables représentent les deux nombres incommensurables proposés.

5. *Multiplication.* Soit à faire le produit de deux nombres incommensurables, par exemple $\sqrt{7} \times \sqrt{5}$. Si l'on prend

les deux nombres par défaut, puis par excès, on a un premier produit plus petit que le second; d'ailleurs ces deux produits diffèrent entre eux d'une quantité aussi petite qu'on veut; donc ils comprennent une grandeur qu'ils représentent avec une approximation indéfinie.

Il est clair que le produit de plusieurs nombres incommensurables ne change pas quand on intervertit l'ordre des facteurs; car le produit des nombres fractionnaires approchés ne change pas. Ce théorème fondamental étendu aux nombres incommensurables, toutes ses conséquences le sont par là même ; ainsi on peu grouper deux facteurs en un seul, décomposer au contraire un facteur en deux, etc.

Division. Si l'on prend le dividende par défaut, le diviseur par excès, ou, réciproquement, le dividende par excès, le diviseur par défaut, le premier quotient sera plus petit que le second, et comme leur différence est infiniment petite, ils comprennent entre eux une grandeur déterminée qu'ils représentent avec une approximation indéfinie.

Les propriétés des fractions algébriques, et en général toutes les règles du calcul algébrique, subsistent évidemment quand les lettres désignent des nombres incommensurables. (Voyez l'*Algèbre*, première partie, livre I.)

CHAPITRE II.

CALCUL DES RADICAUX.

6. On appelle en général racine n^e d'un nombre positif a, un nombre positif, commensurable ou incommensurable,

qui, élevé à la n^e puissance, reproduit le nombre proposé. C'est là ce qu'on entend par *valeur arithmétique* d'un radical; on la désigne par le symbole $\sqrt[n]{a}$. Le nombre n est l'indice du radical. On est convenu de ne pas écrire l'indice quand il s'agit d'une racine carrée : dans ce cas, on sous-entend l'indice 2.

Avant d'aborder le calcul des radicaux, nous établirons quelques lemmes sur les puissances :

7. Lemme I. *On élève un produit à une certaine puissance en élevant chaque facteur séparément à cette puissance.*

On a, en effet,

$$(abc)^n = abc \times abc \times abc \times \ldots\ldots = a^n b^n c^n.$$

Lemme II. *On élève une fraction à une certaine puissance en élevant les deux termes séparément à cette puissance.*

On a, en effet,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \ldots\ldots = \frac{a^n}{b^n}.$$

Lemme III. *Élever un nombre à deux puissances successives revient à élever ce nombre à une puissance ayant pour exposant le produit des exposants.*

On a, en effet,

$$(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \times \ldots\ldots = a^{mn}.$$

Corollaire I. *On élève un monôme à une certaine puissance en élevant son coefficient à cette puissance et multipliant tous les exposants par l'indice de la puissance.*

Soit à élever à la n^e puissance le monôme $5a^3b^2c$. En vertu des lemmes I et III, on aura

$$(5a^3b^2c)^n = 5^n a^{3n} b^{2n} c^n.$$

COROLLAIRE II. Un monôme est une puissance n^e parfaite, lorsque son coefficient est une puissance n^e parfaite et que tous ses exposants sont divisibles par n. Dans ce cas, on obtient la racine n^e du monôme proposé, en extrayant la racine n^e de son coefficient et divisant par n tous ses exposants.

Venons maintenant au calcul des radicaux.

8. THÉORÈME I. *Le produit de plusieurs radicaux de même indice est égal à la racine du produit des quantités placées sous les radicaux.*

Je dis, par exemple, que

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}=\sqrt[n]{abc}.$$

Car si l'on élève le premier membre à la n^e puissance, ce que l'on fait en élevant chaque facteur à cette puissance, on reproduit la quantité abc; donc ce premier membre est la racine n^e de abc.

9. THÉORÈME II. *Le quotient de deux radicaux de même indice est égal à la racine du quotient des deux quantités placées sous les radicaux.*

Je dis que

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Car si l'on élève le premier membre à la n^e puissance, ce que l'on fait en élevant séparément le numérateur et le dénominateur à cette puissance, on reproduit la fraction $\frac{a}{b}$.

10. THÉORÈME III. *On élève un radical à une certaine*

puissance en élevant à cette puissance la quantité placée sous le radical.

On a, en effet, en vertu du théorème I,

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{a}.\ .\ .\ .\ . = \sqrt[n]{a^m}.$$

Remarque. L'expression $\sqrt[n]{a^m}$ indique qu'il faut élever le nombre a à la m^e puissance, et extraire la racine n^e du résultat. Lorsque l'exposant m de la quantité placée sous le radical est divisible par l'indice n du radical, on peut extraire la racine; il suffit de diviser l'exposant par l'indice du radical. En effet, soit $m = np$, on aura

$$\sqrt[n]{a^{np}} = a^p;$$

car, si on élève la quantité a^p à la puissance n, on reproduit a^{np}.

11. Théorème IV. *On extrait la racine d'un radical en multipliant l'indice du radical par l'indice de la racine que l'on veut extraire.*

Je dis que

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$$

En effet, si l'on élève le premier membre à la puissance m, on trouve $\sqrt[n]{a}$; si l'on élève ensuite ce résultat à la puissance n, on obtient a; mais ceci revient à élever le premier membre à la puissance mn. Ainsi, le premier membre est une quantité qui, élevée à la puissance mn, reproduit a; c'est donc la racine mn^e de a.

12. Théorème V. *On ne change pas la valeur d'un radical quand on multiplie ou quand on divise par un même nombre*

l'indice du radical et l'exposant de la quantité placée sous le radical.

Soit le radical

$$\sqrt[n]{a^m}.$$

Je dis qu'en multipliant par un même nombre entier p l'indice n et l'exposant m, on obtient un second radical

$$\sqrt[np]{a^{mp}}.$$

égal au premier. En effet, d'après le théorème précédent, le second radical peut s'écrire

$$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{\sqrt[p]{a^{mp}}}.$$

Mais on a (n° 10)

$$\sqrt[p]{a^{mp}} = a^m;$$

donc

$$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

13. Corollaire I. On *simplifie* un radical en divisant l'indice et l'exposant par leur plus grand commun diviseur. Ainsi

$$\sqrt[12]{a^{20}} = \sqrt[3]{a^5}.$$

14. Corollaire II. On réduit plusieurs radicaux au *même indice* en prenant pour indice commun le produit des indices, ou plus simplement leur plus petit multiple. Cette réduction est nécessaire quand on veut multiplier ou diviser deux radicaux d'indices différents. Ainsi

$$\sqrt[m]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[mn]{a^n} \times \sqrt[mn]{b^m} = \sqrt[mn]{a^n b^m}.$$
$$\sqrt[4]{a} \times \sqrt[6]{b} = \sqrt[12]{a^3} \times \sqrt[12]{b^2} = \sqrt[12]{a^3 b^2}.$$

CHAPITRE III.

EXPOSANTS FRACTIONNAIRES. — EXPOSANTS NÉGATIFS.

Exposants fractionnaires.

15. On a vu (n° 10) que, pour extraire la racine d'une quantité affectée d'un certain exposant, il suffit de diviser l'exposant par l'indice de la racine, lorsque cette division est possible. Ainsi

$$\sqrt[4]{a^{12}} = a^3.$$

Si, par extension, on applique la même règle dans le cas où l'exposant n'est pas divisible par l'indice de la racine, on obtient un exposant fractionnaire. Soit le radical $\sqrt[5]{a^7}$; l'exposant 7 n'étant pas divisible par l'indice 5, il est impossible d'extraire la racine; mais si l'on applique la règle énoncée plus haut, on est conduit au symbole $a^{\frac{7}{5}}$ que l'on adoptera pour représenter le radical proposé.

En général, on est convenu de représenter un radical quelconque $\sqrt[n]{a^m}$ par le symbole $a^{\frac{m}{n}}$. Le dénominateur de l'exposant fractionnaire remplace ainsi le signe $\sqrt[n]{}$, et les expressions irrationnelles prennent la forme d'expressions rationnelles.

D'après cette convention, les radicaux

$\sqrt{a}$ s'écriront $a^{\frac{1}{2}}$

$\sqrt[3]{a}$ . . . . $a^{\frac{1}{3}}$

$\sqrt{a^3}$ . . . . $a^{\frac{3}{2}}$

$\sqrt[3]{a^2}$ . . . . $a^{\frac{2}{3}}$

$7\sqrt[3]{a^3b^2c}$ . . . . . $7ab^{\frac{2}{3}}c^{\frac{1}{3}}$.

16. L'emploi des exposants fractionnaires ne sera vraiment utile que s'il est permis de remplacer un exposant fractionnaire par un autre égal au premier. C'est ce qui a lieu effectivement; car multiplier ou diviser par un même nombre les deux termes d'un exposant fractionnaire, revient à multiplier ou diviser par un même nombre l'indice d'un radical et l'exposant de la quantité placée sous le radical, ce qui, comme on l'a vu plus haut, ne change pas la valeur du radical.

On pourra donc, si l'on veut, réduire un exposant fractionnaire à sa plus simple expression. Soit, par exemple, le radical $\sqrt[12]{a^{20}}$, qui s'écrit symboliquement $a^{\frac{20}{12}}$; en simplifiant l'exposant fractionnaire $\frac{20}{12}$, on obtient le symbole $a^{\frac{5}{3}}$, qui représente le radical $\sqrt[3]{a^5}$, égal au premier.

Nous ferons voir maintenant que les règles du calcul des exposants entiers s'appliquent aux exposants fractionnaires.

17. *Multiplication.* On sait que, pour multiplier deux puissances entières a^m et a^n d'un même nombre a, il suffit d'ajouter les exposants, ce qui donne a^{m+n}. La même règle s'applique aux exposants fractionnaires.

Soient en effet $m=\frac{p}{q}$, $n=\frac{p'}{q'}$; les deux puissances fraction-

naires $a^{\frac{p}{q}}$ et $a^{\frac{p'}{q'}}$ représentent les radicaux $\sqrt[q]{a^p}$ et $\sqrt[q']{a^{p'}}$; pour multiplier ces deux radicaux, on les réduira d'abord au même indice, ce qui donne

$$\sqrt[qq']{a^{pq'}} + \sqrt[qq']{a^{p'q}} = \sqrt[qq']{a^{pq'} \times a^{p'q}} = \sqrt[qq']{a^{pq'+p'q}}.$$

Or ce dernier radical, produit des deux premiers, est représenté par le symbole

$$a^{\frac{pq'+p'q}{qq'}},$$

ou

$$a^{\frac{p}{q}+\frac{p'}{q'}};$$

on a donc

$$a^m \times a^n = a^{m+n},$$

quels que soient les exposants m et n, entiers ou fractionnaires.

Exemples.

1° $a^{\frac{2}{5}} \times a^{\frac{3}{5}} = a$,

2° $a \times a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{2}}$,

3° $a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{1}{2}}$,

4° $a^{\frac{1}{4}} a^{\frac{5}{6}} a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{21}{12}} = a^{\frac{7}{4}}$.

18. *Division.* La règle de la multiplication étant étendue aux exposants fractionnaires, celle de la division l'est par là même.

Je dis que l'on a

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},$$

quels que soient les exposants m et n; car, si l'on multiplie

le quotient par le diviseur, ce que l'on fait en ajoutant les exposants, on reproduit le dividende a^m. Ainsi, pour diviser l'une par l'autre deux puissances quelconques d'un même nombre, il suffira de retrancher l'exposant du diviseur de celui du dividende.

Exemples.

1° $\dfrac{a}{a^{\frac{2}{3}}} = a^{\frac{1}{3}}$,

2° $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} = a$,

3° $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{3}}} = a^{\frac{1}{6}}$,

4° $\dfrac{a^{\frac{5}{6}}}{a^{\frac{3}{4}}} = a^{\frac{1}{12}}$.

19. *Puissance.* Nous avons démontré que l'on élève un nombre a à deux puissances entières successives m et n en élevant ce nombre à une puissance ayant pour exposant le produit mn des exposants. La même règle s'applique aux exposants fractionnaires.

Soient en effet $m = \dfrac{p}{q}$, $n = \dfrac{p'}{q'}$; l'exposant

$$(a^m)^n \quad \text{ou} \quad \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{p'}{q'}}$$

signifie

$$\sqrt[q']{\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{p'}} \quad \text{ou} \quad \sqrt[q']{\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^{p'}}.$$

Il faut élever le radical $\sqrt[q]{a^p}$ à la puissance p' et prendre

la raison q'^e du résultat. On sait (n° 10) que l'on élève un radical à une puissance en élevant à cette puissance la quantité placée sous le radical; on a donc

$$\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^{p'} = \sqrt[q]{a^{pp'}}$$

et par suite

$$\sqrt[q']{\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^{p'}} = \sqrt[q']{\sqrt[q]{a^{pp'}}}.$$

On sait d'autre part (n° 11) que l'on extrait la racine d'un radical en multipliant l'indice du radical par l'indice de la racine, ce qui donne

$$\sqrt[q']{\sqrt[q]{a^{pp'}}} = \sqrt[qq']{a^{pp'}}.$$

Mais ce dernier radical est représenté par le symbole $a^{\frac{pp'}{qq'}}$ ou $a^{\frac{p}{q}\times\frac{p'}{q'}}$: on a donc d'une manière générale

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Exemples.

1° $\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{9}{4}} = a^{\frac{3}{2}}$,

2° $\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = a$,

3° $\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{8}{3}} = a^2$.

Exposants incommensurables.

20. Prenons comme exemple l'expression $a^{\sqrt{2}}$. Soient $\frac{m}{n}$ et $\frac{m+1}{n}$ deux nombres fractionnaires dont les carrés

comprennent $\sqrt{2}$; l'expression $a^{\sqrt{2}}$ désignera la limite commune des deux quantités $a^{\frac{m}{n}}$ et $a^{\frac{m+1}{n}}$, quand la différence $\frac{1}{n}$ devient de plus en plus petite. Mais, pour compléter cette définition, il faut démontrer que ces deux quantités $a^{\frac{m}{n}}$ et $a^{\frac{m+n}{n}}$ tendent effectivement vers une limite commune : c'est ce que nous ferons voir plus tard, quand nous aurons établi quelques propriétés des puissances servant à la définition des logarithmes.

Admettant pour le moment l'existence de cette limite, nous remarquerons que toutes les règles démontrées pour le calcul des exposants fractionnaires s'étendent évidemment aux exposants incommensurables.

Ainsi

$$a^{\sqrt{3}}\, a^{\sqrt{2}} = a^{\sqrt{3}+\sqrt{2}},$$

$$\left(a^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{2}} = a^{\sqrt{6}},$$

$$\left(a^{\sqrt{12}}\right)^{\sqrt{3}} = a^{\sqrt{36}} = a^{6}.$$

Exposants négatifs.

21. Nous savons que pour diviser l'une par l'autre deux puissances d'un même nombre, il suffit de retrancher l'exposant du diviseur de l'exposant du dividende, lorsque l'exposant du diviseur est plus petit que celui du dividende.

Si l'on applique la même règle lorsque l'exposant du diviseur est plus grand que celui du dividende, on obtient un exposant négatif. Soit le quotient $\frac{a^5}{a^7}$; l'exposant du diviseur étant plus grand que celui du dividende, la division

est impossible; mais, si l'on applique la règle énoncée plus haut, on est conduit au symbole a^{-3}; le quotient proposé, simplifié, devient $\frac{1}{a^3}$; ainsi le symbole a^{-3} peut être adopté comme représentant le quotient $\frac{1}{a^3}$.

En général, on est convenu de représenter le quotient $\frac{1}{a^m}$, dans lequel l'exposant m est quelconque, entier ou fractionnaire, par le symbole a^{-m}. L'exposant négatif remplace ainsi le signe de la division.

Nous ferons voir que les règles établies précédemmen pour le calcul des exposants positifs s'étendent aux exposants négatifs.

22. ***Multiplication.*** Pour multiplier deux puissances a^m et a^n d'un même nombre, il suffit de faire la somme algébrique des exposants, quels que soient ces exposants, positifs ou négatifs.

1° Considérons d'abord le cas où l'un des exposants m est positif, l'autre n négatif. Posons $n = -n'$, les nombres positifs m et n' étant quelconques, entiers ou fractionnaires, ou même incommensurables. Puisque le symbole $a^{-n'}$ représente $\frac{1}{a^{n'}}$, on a

$$a^m \times a^n = a^m \times a^{-n'} = a^m \times \frac{1}{a^{n'}} = \frac{a^m}{a^{n'}};$$

mais le quotient $\frac{a^m}{a^{n'}}$ est représenté dans tous les cas, que m soit plus grand ou plus petit que n', par le symbole $a^{m-n'}$; on a donc

$$a^m \times a^n = a^{m-n'} = a^{m+n}.$$

L'exposant du produit est la somme algébrique des deux exposants.

2° Supposons maintenant les deux exposants négatifs, et soient $m = -m'$, $n = -n'$. Puisque les symboles $a^{-m'}$ et $a^{-n'}$ désignent les quotients $\frac{1}{a^{m'}}$ et $\frac{1}{a^{n'}}$, on a

$$a^m \times a^n = a^{-m'} \times a^{-n'} = \frac{1}{a^{m'}} \times \frac{1}{a^{n'}} = \frac{1}{a^{m'} \times a^{n'}} = \frac{1}{a^{m'+n'}}.$$

Mais cette dernière expression est représentée par $a^{-(m'+n')}$ ou $a^{-m'-n'}$. On a donc

$$a^m \times a^n = a^{-m'-n'} = a^{m+n}.$$

L'exposant du produit est encore la somme algébrique des exposants.

Exemples.

1° $a^5 \times a^{-2} = a^3$,
2° $a^{-5} \times a^2 = a^{-3}$,
3° $a^2 \times a^{-2} = a^0 = 1$,
4° $a^{-5} \times a^{-2} = a^{-7}$.

23. *Division.* La règle de la multiplication étant étendue aux exposants négatifs, celle de la division l'est par là même. Pour diviser l'une par l'autre deux puissances quelconques d'un même nombre, il suffit de retrancher algébriquement l'exposant du diviseur de celui du dividende; car en multipliant le quotient ainsi obtenu par le diviseur, on reproduit le dividende. Remarquons que ceci revient à transformer le diviseur en multiplicateur par le changement de signe de son exposant.

Exemples.

1° $\frac{a^{-3}}{a^2} = a^{-3} \times a^{-2} = a^{-5}$,

2° $\frac{a^3}{a^{-2}} = a^3 \times a^2 = a^5$,

3° $\frac{a^{-3}}{a^{-2}} = a^{-3} \times a^2 = a^{-1}$,

4° $\frac{a^{-3}}{a^{-5}} = a^{-3} \times a^5 = a^2$.

24. ***Puissance.*** Pour élever un nombre à deux puissances successives, il suffit de multiplier entre eux les deux exposants, quels que soient leurs signes.

1° Considérons d'abord le cas où le premier exposant $m = -m'$ est négatif, le second n positif.

$$(a^m)^n = (a^{-m'})^n = \left(\frac{1}{a^{m'}}\right)^n = \frac{1}{a^{m'n}};$$

mais ce résultat peut être représenté par $a^{-m'n}$ ou par a^{mn}; ainsi

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

2° Supposons le premier exposant m positif, le second $n = -n'$ négatif. L'expression $(a^m)^{-n'}$ représente le quotient

$$\frac{1}{(a^m)^{n'}},$$

qui est égal à $\frac{1}{a^{mn'}}$, et qui peut être représenté par $a^{-mn'}$, ou par a^{mn}. On a encore

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

3° Supposons enfin les deux exposants négatifs et soient $m = -m'$, $n = -n'$. L'expression $(a^{-m'})^{-n'}$ représente le quotient

$$\frac{1}{(a^{-m'})^{n'}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^{m'}}\right)^{n'}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^{m'n'}}\right)} = a^{m'n'} = a^{mn},$$

et l'on a toujours

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Ainsi, dans tous les cas, l'exposant du résultat est le produit algébrique des deux exposants, conformément à la règle des signes.

Exemples.

1° $(a^{-3})^2 = a^{-6}$,

2° $(a^3)^{-2} = a^{-6}$,

3° $(a^{-2})^{-3} = a^6$.

Tout ce que nous avons dit sur le calcul des exposants fractionnaires et négatifs, peut se résumer en deux règles fondamentales :

1° $a^m \times a^n = a^{m+n}$,

2° $(a^m)^n = a^{mn}$,

m et n désignant des exposants quelconques, entiers ou fractionnaires, positifs ou négatifs.

LIVRE II.

BINOME.

CHAPITRE PREMIER.

COMBINAISONS.

Arrangements.

25. Je suppose que l'on ait m objets distincts. On appelle *arrangements* de ces m objets n à n les différentes dispositions que l'on peut former avec ces m objets, en les prenant n à n de toutes les manières possibles, et les plaçant les uns à côté des autres sur une ligne droite. Deux arrangements diffèrent, par la nature des objets qui les composent, ou seulement par l'ordre dans lequel ils sont placés.

Par exemple, avec les trois lettres a, b, c, prises deux à deux de toutes les manières, on peut former les six arrangements suivants

$$ab,\ ac,\ ba,\ bc,\ ca,\ cb.$$

Le premier et le troisième ne diffèrent que par l'ordre des lettres ; de même le second et le cinquième, le quatrième et le sixième.

Nous représenterons en général les m objets par les premières lettres de l'alphabet

$$a,\ b,\ c,\ \ldots\ldots\ k,$$

et nous désignerons par le symbole A_m^n le nombre des arrangements que l'on peut former avec ces m objets pris n à n de toutes les manières possibles.

On obtient évidemment les arrangements des m lettres une à une, en prenant chacune d'elles séparément, ce qui donne m arrangements,

$$a,\ b,\ c,\ \ldots\ldots\ k.$$

Ainsi

$$A_m = m.$$

Nous obtiendrons les arrangements des m lettres deux à deux en mettant à la suite de la première lettre a successivement chacune des autres lettres, à la suite de la seconde lettre b successivement chacune des autres, et ainsi de suite, ce qui donne le tableau suivant :

$$\begin{array}{l}
ab,\ ac,\ ad,\ \ldots\ldots,\ ak,\\
ba,\ bc,\ bd,\ \ldots\ldots,\ bk,\\
ca,\ cb,\ cd,\ \ldots\ldots,\ ck,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
ka,\ kb,\ kc,\ \ldots\ldots\ kh.
\end{array}$$

La première ligne horizontale contenant tous les arrangements qui commencent par la lettre a, la deuxième tous ceux qui commencent par la lettre b, etc., nous avons ainsi formé tous les arrangements des m lettres deux à deux. Puisque chaque ligne horizontale renferme $m-1$ arrangements, et qu'il y a m lignes, le nombre des arrangements

contenus dans le tableau est $m(m-1)$; on a donc

$$A_m^2 = m(m-1).$$

De même, si à la suite de chacun des arrangements deux à deux on place chacune des $m-2$ autres lettres, on forme les arrangements trois à trois :

$$\begin{array}{l} abc,\ abd,\ \ldots\ldots,\ abk, \\ acb,\ acd,\ \ldots\ldots,\ ack, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ bac,\ bad,\ \ldots\ldots,\ bak, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

A la suite du premier arrangement ab de deux lettres, nous avons écrit chacune des autres lettres c, d,..... k; de même, à la suite du second ac, chacune des autres lettres b, d,.... k, etc. Nous avons formé ainsi tous les arrangements trois à trois ; car un arrangement de trois lettres se compose nécessairement d'un arrangement de deux lettres suivi d'une autre lettre. Le même arrangement n'est pas répété deux fois ; car les arrangements d'une même ligne horizontale diffèrent par la troisième lettre, et deux arrangements de deux lignes différentes par l'arrangement des deux premières lettres. Chaque ligne horizontale contient $m-2$ arrangements ; il y a $m(m-1)$ lignes horizontales, autant que d'arrangements deux à deux ; donc le nombre des arrangements des m lettres trois à trois est

$$m(m-1)(m-2);$$

on a donc

$$A_m^3 = m(m-1)(m-2).$$

En continuant le même raisonnement, on arrive à la formule générale

$$A_m^n = m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1).$$

Le nombre des arrangements de m *objets* n *à* n *est égal au produit de* n *nombres entiers consécutifs décroissants à commencer par* m.

26. Il est bon de s'assurer que la formule précédente, écrite par induction, est générale. Supposons que l'on ait formé les arrangements des m lettres $n-1$ à $n-1$, et que l'on veuille former les arrangements n à n. A la suite de chacun des arrangements $n-1$ à $n-1$, on écrira successivement chacune des $m-n+1$ autres lettres. On obtiendra de la sorte tous les arrangements n à n; car un arrangement de n lettres se compose d'un arrangement de $n-1$ lettres suivi d'une autre lettre. Le même arrangement ne se trouve pas répété deux fois; car deux quelconques des arrangements ainsi obtenus diffèrent par la dernière lettre ou par l'arrangement des $n-1$ premières lettres. Chaque arrangement ancien donnant $m-n+1$ arrangements nouveaux, on a la relation générale

$$A_m^n = A_m^{n-1} \times (m-n+1).$$

On en déduit, en donnant successivement à n les valeurs $2, 3, 4, \ldots\ldots n$,

$$A_m^2 = A_m^1 \times (m-1) = m(m-1),$$
$$A_m^3 = A_m^2 \times (m-2),$$
$$A_m^4 = A_m^3 \times (m-3),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_m^n = A_m^{n-1} \times (m-n+1).$$

Si l'on multiplie toutes ces égalités entre elles, les facteurs intermédiaires disparaissent, et l'on obtient la formule

$$A_m^n = m(m-1) \ldots\ldots (m-n+1).$$

Applications. 1° Quel est le nombre des arrangements de sept lettres trois à trois? C'est le produit de trois nombres entiers consécutifs décroissants, à commencer par 7.

$$A_7^3 = 7.6.5 = 210.$$

2° Combien y a-t-il de nombres composés de deux chiffres significatifs différents? Autant qu'on peut former d'arrangements avec les neuf chiffres significatifs deux à deux.

$$A_9^2 = 9.8 = 72.$$

3° Combien y a-t-il de nombres composés de cinq chiffres significatifs différents? Autant qu'on peut former d'arrangements cinq à cinq avec les neuf chiffres significatifs.

$$A_9^5 = 9.8.7.6\,5 = 15120.$$

Permutations.

27. On appelle *permutations* de m objets les différentes dispositions que l'on peut donner à ces m objets, en les plaçant les uns à côté des autres sur une ligne droite. Chaque permutation contient tous les objets, et deux permutations ne diffèrent que par l'ordre des objets.

Ainsi, avec deux lettres a et b, on peut former deux permutations

$$ab,\ ba.$$

Nous désignerons en général par P_m le nombre des permutations de m objets. Il résulte de la définition que les permutations de m objets ne sont autre chose que les arrangements de ces m objets pris tous ensemble, c'est-à-dire m à m; on a donc, suivant la notation habituelle,

$$P_m = A_m^m = m(m-1)(m-2)\ldots\ldots 3.2.1,$$

ou, si l'on change l'ordre des facteurs,

$$P_m = 1.2.3. \dots .m.$$

Le nombre des permutations de m *objets égale le produit des* m *premiers nombres entiers.*

Applications. 1° Combien peut-on former de mots de trois lettres différentes avec trois lettres données ? C'est le nombre des permutations de trois lettres.

$$P_3 = 1.2.3 = 6.$$

2° De combien de manières peut-on disposer dix soldats en ligne ? C'est le nombre des permutations de dix objets

$$P_{10} = 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10 = 3628800.$$

28. Nous avons déduit la formule des permutations de celles des arrangements comme cas particulier. Voici comment on peut établir cette formule directement.

On ne peut évidemment donner qu'une disposition à une lettre a ; ainsi

$$P_1 = 1.$$

Avec deux lettres a et b, on peut former deux permutations

$$ab,\ ba,$$

et l'on a

$$P_2 = 1.2.$$

Si, dans chacune des permutations précédentes, on introduit la lettre c à toutes les places, à la fin, au milieu, au commencement, on obtient les permutations de trois lettres $a, b, c,$

$$abc,\ acb,\ cab,$$
$$bac,\ bca,\ cba.$$

On a formé ainsi toutes les permutations de trois lettres; car une permutation de trois lettres se compose d'une permutation des deux premières lettres a et b à laquelle on ajoute la troisième lettre c à une place déterminée. La même permutation ne se trouve pas répétée deux fois ; car deux permutations quelconques diffèrent, soit par la place de la lettre c, soit par la disposition des deux autres lettres. Chacune des permutations précédentes donnant trois permutations nouvelles, on a

$$P_3 = P_2 \times 3 = 1.2.3.$$

De même, si dans chacune des permutations des trois lettres a, b, c, on introduit la lettre d à toutes les places, et il y a quatre places, deux intermédiaires et deux extrêmes, on obtient les permutations des quatre lettres a, b, c, d; chacune des permutations précédentes donnant quatre permutations nouvelles, on a

$$P_4 = P_3 \times 4 = 1.2.3\,4.$$

En continuant le même raisonnement, on arrive à la formule générale

$$P_m = 1.2.3\ldots\ldots m.$$

Combinaisons.

29. On appelle *combinaisons* de m objets n à n les différents groupes que l'on peut former avec ces m objets en les prenant n à n, de toutes les manières possibles, de façon que deux groupes diffèrent au moins par la nature d'un objet. Dans les combinaisons on n'a pas égard à la disposition des objets.

Si l'on a m lettres et que l'on imagine qu'elles représentent des quantités différentes, on peut concevoir les combinaisons de ces m lettres n à n comme les différents

produits que l'on peut former avec ces m lettres, en les prenant n à n de toutes les manières possibles.

Par exemple, avec les trois lettres a, b, c, prises deux à deux, on ne peut former que trois combinaisons

$$ab,\ ac,\ bc,$$

tandis que l'on a six arrangements.

Nous désignerons en général par C_m^n le nombre des combinaisons de m objets n à n. La formule des combinaisons se déduit de celle des arrangements et de celle des permutations. Imaginons en effet les combinaisons de m lettres n à n formées. Si nous donnons aux n lettres qui composent chacune de ces combinaisons toutes les dispositions possibles, c'est-à-dire si nous formons les permutations de ces n lettres, nous obtiendrons les arrangements des m lettres n à n. Nous aurons ainsi tous les arrangements; car un arrangement quelconque est une combinaison dans laquelle les n lettres qui composent cette combinaison sont disposées dans un certain ordre; et nous n'aurons pas deux fois le même arrangement; car les arrangements fournis par une même combinaison diffèrent par l'ordre des lettres, et ceux qui sont fournis par des combinaisons différentes diffèrent au moins par la nature d'une lettre. Chaque combinaison donnant un nombre d'arrangements marqué par P_n, on a

$$A_m^n = C_m^n \times P_n;$$

d'où

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n},$$

et, en remplaçant par les valeurs connues,

$$C_m^n = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)}{1.2.3.\ldots\ldots n}.$$

Applications. Pour appliquer la formule, on écrit d'abord au dénominateur les n premiers nombres entiers, puis on écrit au numérateur autant de nombres entiers décroissants, à commencer par m.

1° Nombre des combinaisons de 5 objets 2 à 2.

$$C_5^2 = \frac{5.4}{1.2} = 10.$$

2° Nombre des combinaisons de 10 lettres 4 à 4.

$$C_{10}^4 = \frac{10.9.8.7}{1.2.3.4} = 210.$$

3° Nombre des combinaisons de 10 lettres 6 à 6.

$$C_{10}^6 = \frac{10.9.8.7.6.5}{1.2.3.4.5.6} = \frac{10.9.8.7}{1.2.3.4} = 210.$$

4° Le nombre des combinaisons de m lettres une à une est m, ce qui est évident *à priori.*

5° Le nombre des combinaisons de m lettres m à m est

$$C_m^m = \frac{m(m-2)(m-5)\ldots\ldots 3.2.1}{1.2.3.\ldots\ldots m} = 1.$$

Il est évident en effet que si l'on prend toutes les lettres, on ne peut former qu'une seule combinaison.

Nous démontrerons sur les combinaisons deux théorèmes qui nous seront utiles par la suite.

30. Théorème I. *Le nombre des combinaisons de* m *objets* n *à* n *est égal au nombre des combinaisons de ces* m *objets* m — n *à* m — n.

Supposons en effet que l'on ait m numéros dans une urne; si l'on en tire n, il en restera $m-n$ dans l'urne; ainsi à chaque combinaison de n numéros tirés correspond

une combinaison de $m-n$ numéros restants, et réciproquement. On a donc

$$C_m^n = C_m^{m-n}.$$

On peut d'ailleurs vérifier aisément l'égalité des deux nombres

$$C_m^n = \frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)}{1.2.3.\ldots\ldots n},$$

$$C_m^{m-n} = \frac{m(m-1)\ldots\ldots(n+1)}{1.2.3.\ldots\ldots(m-n)};$$

car si l'on multiplie les deux termes de la première fraction par le produit $1.2\ldots\ldots(m-n)$, les deux termes de la seconde par $1.2\ldots,.n$, les dénominateurs deviennent égaux et l'on a au numérateur le produit des nombres entiers consécutifs de 1 à m; il vient de la sorte

$$C_m^n = C_m^{m-n} = \frac{1.2.3.\ldots\ldots m}{1.2.\ldots\ldots n \times 1.2.\ldots\ldots(m-n)}.$$

Par exemple, le nombre des combinaisons de 5 objets 4 à 4 est égal au nombre des combinaisons de 5 objets 1 à 1, le nombre des combinaisons de 5 objets 3 à 3 est égal au nombre des combinaisons des 5 objets 2 à 2.

31. Théorème II. *Le nombre des combinaisons de* m *objets* n *à* n *est égal au nombre des combinaisons de* m — 1 *objets* n *à* n, *plus le nombre des combinaisons de* m — 1 *objets* n — 1 *à* n — 1.

En effet, les combinaisons de m lettres $a, b, c, \ldots\ldots k$, prises n à n, peuvent être distinguées en deux catégories, celles qui ne contiennent pas une certaine lettre k, et celles qui la contiennent. La première catégorie se compose évidemment des combinaisons des $m-1$ premières lettres n à n. On obtiendra celles de la seconde catégorie en formant

les combinaisons des $m-1$ premières lettres $n-1$ à $n-1$, et ajoutant à chacune d'elles la lettre k. On a donc

$$C_m^n = C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1}.$$

On peut aussi vérifier facilement cette égalité au moyen de la formule des combinaisons.

Par exemple, le nombre des combinaisons de 7 objets 3 à 3 est égal au nombre des combinaisons de 6 objets 3 à 3, plus le nombre des combinaisons de 6 objets 2 à 2.

Probabilités.

32. On appelle *probabilité* d'un événement le rapport du nombre des cas favorables au nombre total des cas possibles, lorsque tous ces cas sont également possibles. Je suppose qu'une urne renferme 12 boules d'égale grandeur, 7 blanches et 5 noires. On tire une boule au hasard, et l'on demande la probabilité pour chaque couleur. Il y a 12 cas possibles et également possibles : 7 pour les blanches, 5 pour les noires. La probabilité est donc $\frac{7}{12}$ pour la sortie d'une blanche, $\frac{5}{12}$ pour la sortie d'une noire.

La loterie se composait de 90 numéros ; à chaque tirage il en sortait 5 au hasard. Une personne désigne un numéro, par exemple, le numéro 20 ; si le numéro désigné se trouve parmi les 5 numéros sortants, la personne a gagné ; sinon elle a perdu. C'est là ce qu'on appelait prendre un *extrait*. Il est facile d'évaluer la probabilité. Puisqu'on tire 5 numéros à chaque fois, le nombre des cas possibles est le nombre des combinaisons de 90 numéros 5 à 5,

$$C_{90}^5 = \frac{90.89.88.87.86}{1.2.3.4.5}.$$

Les cas favorables sont les combinaisons qui contiennent le numéro désigné 20; pour les former, imaginons que l'on ôte ce numéro 20 et que l'on combine les 89 autres numéros 4 à 4, puis que l'on ajoute à chacune de ces combinaisons le numéro 20; on aura de cette manière toutes les combinaisons qui contiennent le numéro 20. Ainsi, le nombre des cas favorables est le nombre des combinaisons de 89 numéros 4 à 4,

$$C_{89}^4 = \frac{89.88.87.86}{1.2.3.4}.$$

La probabilité de la sortie du numéro désigné, ou le rapport du nombre des cas favorables au nombre total des cas possibles, est le quotient de C_{89}^4 par C_{90}^5, soit $\frac{5}{90}$ ou $\frac{1}{18}$. Ainsi, sur 18 cas possibles, il y en a 1 favorable à la personne qui prend l'extrait, et 17 pour la loterie. Il faudrait donc parier 1 contre 17. La loterie, au lieu de 17 fois, ne donnait que 15 fois la mise.

Lorsqu'on désigne deux numéros, on prend ce qu'on appelle un *ambe;* si les deux numéros désignés sont tous deux parmi les cinq numéros sortants, on a gagné; sinon, on a perdu. Les cas favorables sont les combinaisons qui contiennent les deux numéros désignés; on les formerait en combinant les 88 autres numéros 3 à 3, et ajoutant à chacune des combinaisons les deux numéros désignés. Ainsi, la probabilité de la sortie d'un ambe est le rapport de C_{88}^3 à C_{90}^5, soit $\frac{4.5}{90.89}$ ou $\frac{2}{801}$. Il faudrait donc parier 2 contre 799, ou 1 contre $399 + \frac{1}{2}$; la loterie ne donnait que 270 fois la mise.

On trouvera de même que la probabilité du *terne* est $\frac{1}{11748}$, celle du *quaterne* $\frac{1}{511038}$. La loterie ne donnait que 5500 fois la mise pour le terne, 75000 fois pour le quaterne.

CHAPITRE II.

FORMULE DU BINOME.

33. On sait que le produit de deux polynômes est égal à la somme des produits que l'on obtient en multipliant chacun des termes du multiplicande par chacun des termes du multiplicateur. En général, le produit de plusieurs polynômes est la somme des produits que l'on obtient en prenant de toutes les manières possibles un terme dans chacun des polynômes proposés.

Proposons-nous d'abord d'effectuer le produit des m facteurs binômes

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots(x+h)(x+k),$$

en l'ordonnant par rapport aux puissances décroissantes de x.

Le produit de ces m facteurs binômes est la somme des produits que l'on obtient en prenant de toutes les manières possibles un terme dans chacun d'eux. Si l'on prend les m premiers termes, on obtient le premier terme x^m du produit. Si l'on prend le second terme a dans le premier facteur binôme, et le premier terme x dans tous les autres,

on obtient le produit ax^{m-1} qui est du degré $m-1$; prenant de même le second terme b dans le second facteur binôme et le premier terme x dans tous les autres, on a bx^{m-1}; en un mot, le second terme de l'un quelconque des facteurs binômes, combiné avec les premiers termes de tous les autres, donne au produit un terme en x^{m-1}. Réunissant tous ces termes du degré $m-1$, on voit que x^{m-1} a pour multiplicateur la somme des m quantités $a, b, c, \ldots\ldots k$, somme que pour abréger nous désignerons par S_1. Ainsi le second terme du produit est S_1x^{m-1}

Prenons maintenant les seconds termes dans deux quelconques des facteurs binômes, et les premiers dans tous les autres, nous formerons les termes du degré $m-2$, tels que abx^{m-2}, acx^{m-2}, bcx^{m-2}, etc. Si nous réunissons tous ces termes, nous voyons que x^{m-2}, mis en facteur commun, sera multiplié par la somme des combinaisons deux à deux des m lettres $a, b, \ldots\ldots k$. Désignons par S_2 la somme de ces combinaisons, le troisième terme du produit sera S_2x^{m-2}.

En prenant de même les seconds termes dans trois quelconques des facteurs binômes et les premiers dans tous les autres, on formera les termes du degré $m-3$, tels que $abcx^{m-3}$, $abdx^{m-3}$, etc. Réunissant ces termes en un seul, et appelant S_3 la somme des combinaisons trois à trois des lettres $a, b, \ldots\ldots k$, on obtient le quatrième terme S_3x^{m-3} du produit.

En général, si l'on prend les seconds termes dans n quelconques des facteurs binômes et les premiers dans les $m-n$ autres, on forme les termes du degré $m-n$; réunissant ces termes et représentant par S_n la somme des combinaisons n à n des m lettres $a, b, \ldots\ldots k$, on a le terme général S_nx^{m-n} du produit.

On obtient les termes du premier degré en prenant les

seconds termes dans tous les facteurs binômes, excepté un, et le premier dans cet autre; ces termes réunis donnent l'avant-dernier terme du produit S_{m-1}. Enfin le produit $abc\ldots\ldots k$ des seconds termes de tous les facteurs binômes, produit que nous désignerons par S_m, donne le dernier terme du produit demandé.

Ainsi le produit des m facteurs binômes se développe de la manière suivante :

$$x^m + S_1 x^{m-1} + S_2 x^{m-2} \ldots\ldots + S_n x^{m-n} \ldots\ldots + S_{m-1} x + S_m.$$

34. Supposons maintenant que les quantités a, b, $c\ldots\ldots k$ soient égales entre elles, le produit des m facteurs binômes

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots\ldots(x+k)$$

devient $(x+a)^m$. Voyons à quoi se réduit le développement : la somme S_1 des quantités a, b, $c\ldots\ldots k$ se réduit à ma, puisque chacune de ces quantités devient égale à a et qu'il y en a m. La lettre S_2 désigne la somme des combinaisons deux à deux de ces mêmes quantités; chacune de ces combinaisons devient égale à a^2; et il y en a un nombre marqué par le nombre des combinaisons de m lettres deux à deux, soit $\frac{m(m-1)}{1.2}$; leur somme S_2 est donc égale à $\frac{m(m-1)}{1.2}a^2$. De même S_3 désigne la somme des combinaisons trois à trois; chacune de ces combinaisons devenant égale à a^3 et leur nombre étant $\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$, leur somme égale $\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^3$.

En général, S_n désigne la somme des combinaisons n à n des m quantités a, b, $c\ldots\ldots k$; ces quantités devenant égales

à a, chacune des combinaisons se réduit à a^n ; leur nombre étant le nombre des combinaisons de m lettres n à n, on a

$$S_n = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots\ldots n} a^n.$$

Enfin, le dernier terme, ou le produit des m quantités égales a, b,..... k, se réduit à a^m.

On a ainsi la formule

$$(1) \quad (x+a)^m = x^m + \frac{m}{1} a x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} a^2 x^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} a^3 x^{m-3} + \ldots\ldots + \frac{m}{1} a^{m-1} x + a^m,$$

connue sous le nom de *formule du binôme*. Elle est très-fréquemment employée ; elle sert à former le développement d'une puissance quelconque d'un binôme. Le terme général, celui qui occupe le $n+1^e$ rang dans le développement, est, comme nous l'avons dit,

$$(2) \quad \frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots\ldots n} a^n x^{m-n}.$$

Si dans la formule (1) on remplace a par $-a$, on obtient le développement de $(x-a)^m$,

$$(x-a)^m = x^m - \frac{m}{1} a x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} a^2 x^{m-2} - \ldots\ldots \pm a^m;$$

les signes alternent.

35. Remarque I. Dans la formule du binôme, les exposants de x vont en diminuant graduellement d'une unité, ceux de a vont au contraire en augmentant ; la somme des exposants de a et de x dans chaque terme est constamment égale à m.

Le nombre des termes du développement est $m+1$; car les exposants de x forment la suite des m premiers nombres entiers, plus l'exposant zéro du dernier terme,

$$m,\ m-1,\ m-2,\ \ldots\ldots,\ 1,\ 0,$$

en tout $m+1$ termes.

36. Remarque II. ***Les coefficients des termes également distants des extrêmes sont égaux.*** Si l'on écrit la formule du binôme en laissant les lettres qui marquent les nombres de combinaisons, on a

$$(x+a)^m = x^m + C_m^1 ax^{m-1} + C_m^2 a^2x^{m-2} + \ldots\ldots \\ + C_m^{m-2} a^{m-2}x^2 + C_m^{m-1} a^{m-1}x + a^m.$$

Le premiêr terme et le dernier ont tous deux pour coefficients l'unité, le second terme et l'avant-dernier ont pour coefficients C_m^1 et C_m^{m-1}; mais, en vertu d'un théorème démontré (n° 30), on sait que ces deux nombres sont égaux. De même les troisièmes termes, à partir des deux extrêmes, ont pour coefficients les nombres égaux C_m^2 et C_m^{m-2}, etc.

37. Remarque III. Les coefficients se déduisent les uns des autres par une loi très-simple : ***Multipliez le coefficient du dernier terme obtenu par l'exposant de*** x ***dans ce terme et divisez par le rang de ce terme, vous aurez le coefficient du terme suivant.***

En effet, nous avons trouvé pour le $n+1^e$ terme du développement

$$\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+2)(m-n+1)}{1.2\ldots\ldots(n-1)n}a^nx^{m-n};$$

le terme précédent est

$$\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+2)}{1,2\ldots\ldots(n-1)}a^{n-1}x^{m-n+1}$$

On déduit le $n+1^e$ terme du précédent en augmentant d'une unité l'exposant de a et diminuant d'une unité celui de x. Quant au coefficient, on le forme en multipliant le coefficient précédent par l'exposant $m-n+1$ de x dans ce terme précédent, et divisant par n, rang de ce terme.

Exemples.

Il importe de s'exercer à développer rapidement la puissance d'un binôme. La règle que nous venons d'indiquer facilite beaucoup le calcul.

1°
$$(x+a)^7 = x^7 + 7ax^6 + 21a^2x^5 + 35a^3x^4 + 35a^4x^3 + 21a^5x^2 + 7a^6x + a^7.$$

Pour passer du second terme au troisième, il faut multiplier par 6 et diviser par 2, ce qui revient à multiplier par 3. Pour passer du troisième terme au quatrième, il faut multiplier par 5 et diviser par 3; on divisera d'abord 21 par 3, ce qui donne 7, et l'on multipliera par 5, ce qui donne 35. Le développement contenant $7+1$ ou 8 termes, et les coefficients des termes également distants des extrêmes étant égaux, une fois trouvés les quatre premiers, on écrira les quatre autres immédiatement.

2°
$$(x+a)^8 = x^8 + 8ax^7 + 28a^2x^6 + 56a^3x^5 + 70a^4x^4 + 56a^5x^3 + 28a^6x^2 + 8a^7x + a^8.$$

Le développement contient 9 termes; il est nécessaire de calculer les cinq premiers; arrivé au terme $70a^4x^4$, on remarque que les coefficients se reproduisent.

3°
$$(x-a)^{11} = x^{11} - 11ax^{10} + 55a^2x^9 - 165a^3x^8 + 330a^4x^7 - 462a^5x^6 + 462a^6x^5 - 330a^7x^4 + 165a^8x^3 - 55a^9x^2 + 11a^{10}x - a^{11}.$$

Le nombre des termes étant pair, le dernier terme a le signe —, et les termes qui ont même coefficient sont affectés de signes contraires.

4° $(x-a)^{12}=x^{12}-12ax^{11}+66a^2x^{10}220a^3x^9+495a^4x^8$
$-792a^5x^7+924a^6x^6-792a^7x^5+495a^8x^4-220a^9x^3$
$+66a^{10}x^2-12a^{11}x+a^{12}.$

Le développement contenant un nombre impair de termes, le dernier a le signe + et les termes qui ont même coefficient sont affectés du même signe.

38. Remarque. IV. *Les coefficients vont en augmentant du commencement jusqu'au milieu du développement et en diminuant du milieu à la fin.* En effet, le rapport du coefficient de $n+1^e$ terme à celui du terme précédent est, comme nous l'avons dit,

$$\frac{m-n+1}{n}.$$

C'est par ce rapport que l'on multiplie le coefficient du n^e terme pour former celui du $n+1^e$ terme. Les coefficients vont en croissant tant que le multiplicateur reste supérieur à l'unité; ils vont au contraire en décroissant quand ce multiplicateur devient inférieur à l'unité. Posons donc

$$\frac{m-n+1}{n}>1,$$

et résolvons cette inégalité par rapport à n, nous aurons

$$n<\frac{m+1}{2}.$$

La fraction $\frac{m+1}{2}$ désigne la moitié du nombre des termes

du développement; ainsi les coefficients vont en croissant jusqu'au milieu. A partir du milieu, l'inégalité change de sens et les coefficients décroissent.

Il y a deux cas à distinguer: 1° lorsque m est pair, le nombre des termes $m+1$ est impair; il y a au milieu un coefficient plus grand que tous les autres. Ainsi dans le développement de $(x+a)^8$, dont nous n'écrivons ici que les coefficients

$$1,\ 8,\ 28,\ 56,\ 70\ 56,\ 28,\ 8,\ 1,$$

le coefficient 70 est le plus grand; 2° lorsque m est impair, le nombre des termes est pair, il y a au milieu deux coefficients égaux plus grands que tous les autres. Ainsi dans le développement de $(x+a)^7$, dont les coefficients sont

$$1,\ 7,\ 21,\ 35,\ 35,\ 21,\ 7,\ 1,$$

les deux coefficients 35 du milieu sont les plus grands.

Ce qui précède donne une propriété des combinaisons qu'il est bon de remarquer. On demande, par exemple, de quelle manière il faut combiner huit objets pour avoir le plus grand nombre de combinaisons. Il est clair qu'il faut les combiner 4 à 4; car les coefficients du développement de $(x+a)^8$, à partir du second, sont les nombres de combinaisons que l'on peut former avec 8 objets, en les prenant 1 à 1, 2 à 2, 3 à 3, etc...; le plus grand coefficient étant le cinquième, il en résulte que le nombre des combinaisons des 8 objets 4 à 4 surpasse les autres nombres de combinaisons. De même, avec 7 objets, on obtient le plus grand nombre de combinaisons en les prenant 3 à 3 ou 4 à 4.

39. Remarque V. Si dans le développement de $(x+a)^m$ on fait $x=1$ et $a=1$, chaque terme se réduit à son coeffi-

cient, et l'on a

$$2^m = 1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} + \ldots\ldots + 1.$$

Ainsi la somme des coefficients du développement est égale à 2^m.

En retranchant le premier coefficient qui ne désigne pas un nombre de combinaisons, on en conclut que le nombre total des combinaisons qu'on peut faire avec m objets, en les prenant de toutes les manières possibles, soit 1 à 1, soit 2 à 2, etc., est $2^m - 1$,

$$C_m^1 + C_m^2 + C_m^3 + \ldots\ldots + C_m^m = 2^m - 1.$$

40. Remarque VI. Si dans le développement de $(x-a)$ on fait $x = 1$ et $a = 1$, on a

$$0 = 1 - C_m^1 + C_m^2 - C_m^3 + \ldots\ldots \pm C_m^m,$$

d'où l'on déduit

$$C_m^1 + C_m^3 + \ldots\ldots = 1 + (C_m^2 + C_m^4 + \ldots\ldots).$$

Ainsi, quand on forme toutes les combinaisons possibles avec m objets, le nombre des combinaisons qui renferment un nombre impair d'objets surpasse d'une unité le nombre des combinaisons qui renferment un nombre pair d'objets. Si donc on appelle u et v ces deux nombres de combinaisons, on a

$$u + v = 2^m - 1$$
$$u - v = 1.$$

On en déduit

$$u = 2^{m-1}, \quad v = 2^{m-1} - 1.$$

Par exemple, avec 10 objets on peut former en tout $2^{10} - 1$, c'est-à-dire 1023 combinaisons. Parmi ces combinaisons 512 contiennent un nombre impair d'objets, 511 un nombre pair.

CHAPITRE III.

PUISSANCE D'UN POLYNÔME.

Permutations avec répétition.

41. Nous avons désigné par P_m le nombre des permutations que l'on peut former avec m lettres, quand toutes les lettres sont différentes. Supposons maintenant que, parmi ces m lettres, il y en ait α égales à a, les lettres b, c, d,.... étant différentes; voyons à quoi se réduit le nombre des permutations. Appelons x le nombre des permutations différentes que l'on peut former avec les m lettres proposées, parmi lesquelles α sont égales à a. Si, dans chacun de ces arrangements, on laisse les lettres b, c, d..... à leurs places, et qu'on permute entre elles les α lettres a, on n'apportera aucun changement apparent dans l'arrangement; mais si l'on affecte les lettres a d'indices,

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ .\ a_\alpha,$$

afin de les distinguer les unes des autres, chacun des x arrangements précédents produira P_α arrangements distincts. Comme on a maintenant m lettres différentes, on a formé de la sorte les P_m permutations des m lettres différentes. On a ainsi

$$P_m = x \times P_\alpha,$$

d'où

$$(1) \qquad x = \frac{P_m}{P_\alpha}.$$

Par exemple, avec les trois lettres a, a, b, dont deux sont

égales à a, on ne peut former que $\frac{P_3}{P_2}$, c'est-à-dire 3 permutations différentes

$$aab,\ aba,\ baa.$$

Pour reprendre le raisonnement sur cet exemple, afin de le rendre plus sensible, affectons d'indices les deux lettres a et permutons les deux lettres a_1 et a_2; le premier arrangement aab fournira deux arrangements distincts, a_1a_2b, a_2a_1b; le second aba fournira de même a_1ba_2, a_2ba_1; le troisième donnera ba_1a_2, ba_2a_1; on aura formé ainsi les six permutations

$$a_1a_2b,\ a_1ba_2,\ ba_1a_2,$$
$$a_2a_1b,\ a_2ba_1,\ ba_2a_1,$$

des trois lettres différentes a_1, a_2, b.

42. Supposons que, parmi les m lettres, il y en ait α égales à a et β égales à b, les autres étant différentes, et appelons x le nombre des permutations que l'on peut former avec ces m lettres. Si l'on affecte d'indices les β lettres b, afin de les distinguer les uns des autres, et que, dans chacun des arrangements précédents, on permute ces β lettres, chacun de ces x arrangements fournira P_β arrangements distincts, et l'on aura en tout $x \times P_\beta$ arrangements; ce sont les permutations de m lettres, parmi lesquelles α sont égales à a, les autres étant différentes; le nombre de ces permutations étant égales à $\frac{P_m}{P_\alpha}$, on a

$$x \times P_\beta = \frac{P_m}{P_\alpha};$$

d'où

$$x = \frac{P_m}{P_\alpha . P_\beta}. \qquad (2)$$

On peut continuer le même raisonnement indéfiniment. Si, parmi les m lettres, α sont égales à a, β à b, γ à c, les autres étant différentes, le nombre des permutations que l'on peut former avec ces m lettres sera exprimé par la formule

$$\frac{P_m}{P_\alpha . P_\beta . P_\gamma}, \qquad (3)$$

et ainsi de suite.

Par exemple, si l'on a cinq lettres a, trois lettres b, deux lettres c, et une lettre d, avec ces onze lettres on peut former un nombre de permutations marqué par

$$\frac{P_{11}}{P_5 . P_3 . P_2 . P_1} = \frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11}{1.2.3.4.5 \times 1.2.3 \times 1.2 \times 1} = 27720.$$

Combinaisons avec répétition.

43. Nous avons désigné par C_m^n le nombre des combinaisons que l'on peut faire avec m lettres différentes, en les prenant n à n de toutes les manières possibles, chaque lettre n'entrant qu'une fois au plus dans chaque combinaison. Supposons maintenant que l'on puisse répéter une même lettre autant de fois qu'on le voudra, et nommons D_m^n le nombre de combinaisons que l'on formera de cette manière. Par exemple, avec quatre lettres différentes a, b, c, d, quand une même lettre n'entre qu'une fois dans chaque combinaison, on peut former quatre combinaisons trois à trois,

abc, *abd*, *acd*, *bcd*;

ce sont les combinaisons telles que nous les avons considérées jusqu'à présent. Mais si l'on peut répéter une même lettre, outre les combinaisons précédentes, on en aura d'autres

aab, *aac*, *aad*,
bba, *bbc*, *bbd*,
cca, *ccb*, *ccd*,
dda, *ddb*, *ddc*,
aaa, *bbb*, *ccc*, *ddd*,

dans lesquelles une même lettre entre deux ou trois fois. Dans cet exemple, on a donc $C_4^3 = 4$, $D_4^3 = 20$.

Voici comment on peut trouver le nombre des combinaisons avec répétition. Imaginons qu'on ait formé un tableau contenant toutes les combinaisons de m lettres n à n avec répétition, et comptons le nombre des lettres écrites dans le tableau; chaque combinaison contient n lettres, différentes ou non; le nombre des combinaisons étant représenté par D_m^n, le nombre total des lettres écrites dans le tableau est $n \times D_m^n$; les m lettres y entrant toutes de la même manière, l'une d'elles, par exemple la lettre a, y entre un nombre de fois marqué par $\frac{n \times D_m^n}{m}$. Mais on peut trouver ce nombre d'une autre manière; mettons à part les combinaisons qui contiennent la lettre a, et de chacune d'elles ôtons la lettre a une fois, il nous restera évidemment les combinaisons des m lettres $n-1$ à $n-1$ avec répétition, combinaisons dont le nombre est D_m^{n-1}; en vertu du raisonnement précédent, la lettre a entre dans ces combinaisons un nombre de fois marqué par $\frac{(n-1) \times D_m^{n-1}}{m}$; si l'on ajoute main-

tenant à chacune d'elles la lettre *a* supprimée, pour rétablir les combinaisons primitives, on voit que la lettre *a* entrera dans le tableau un nombre de fois marqué par $\frac{(n-1)\times D_m^{n-1}}{m}+D_m^{n-1}$, ou $\frac{(m+n-1)\times D_m^{n-1}}{m}$. On a donc

$$\frac{n\times D_m^n}{m}=\frac{(m+n-1)\times D_m^{n-1}}{m},$$

ou

$$D_m^n=D_m^{n-1}\times\frac{m+n-1}{n}.$$

On en déduit, en donnant successivement à n les valeurs $2, 3, \ldots n$,

$$D_m^2=D_m^1\times\frac{m+1}{2}=\frac{m}{1}\times\frac{m+1}{2},$$

$$D_m^3=D_m^2\times\frac{m+2}{3},$$

$$D_m^4=D_m^3\times\frac{m+3}{4},$$

. . . .

. . . .

$$D_m^n=D_m^{n-1}\times\frac{m+n-1}{n}.$$

Si l'on multiplie toutes ces égalités entre elles, les facteurs intermédiaires disparaissent, et l'on obtient la formule

$$(4)\qquad D_m^n=\frac{m(m+1)(m+2)\ldots\ldots(m+n-1)}{1.2.3\ldots\ldots n}.$$

Dans les combinaisons ordinaires, dont le nombre est désigné par C_m^n, le nombre n des lettres qui entrent dans chaque combinaison ne peut surpasser le nombre m des

lettres données. Mais, quand on répète une même lettre autant de fois qu'on le veut, rien n'empêche que n soit plus grand que m.

Puissance d'un polynôme.

44. Proposons-nous actuellement d'effectuer le développement de la puissance d'un polynôme,

$$(a+b+c\ldots\ldots+k)^m,$$

c'est-à-dire d'effectuer le produit de m polynômes égaux entre eux. On sait que le produit de plusieurs polynômes est la somme des produits que l'on obtient en prenant un terme dans chacun d'eux. Si nous prenons la lettre a dans α facteurs, la lettre b dans β autres, la lettre c dans γ autres, etc., nous aurons un terme de la forme

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots\ldots;$$

la somme des exposants, ou le degré du terme, est constamment égale à m. Il est évident que l'on obtient plusieurs fois ce même terme, autant de fois que l'on peut former d'arrangements avec α lettres égales à a, β lettres égales à b, γ égales à c, etc.; car à chacun de ces arrangements correspond une manière particulière d'obtenir le terme $a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots\ldots$; en réunissant ces termes égaux, on aura

$$\frac{P_m}{P_\alpha . P_\beta . P_\gamma \ldots\ldots} a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots\ldots$$

Le développement peut donc être représenté par la formule

$$(5)\quad (a+b+c\ldots\ldots+k)^m = \sum \frac{P_m}{P_\alpha . P_\beta . P_\gamma\ldots\ldots} a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots\ldots,$$

le signe Σ indiquant une somme de termes de la même forme.

Toutefois, si l'un des exposants α, β, γ,....., devient égal à zéro, il faut convenir que le symbole P_0, qui n'a aucun sens par lui-même, sera remplacé par l'unité. Supposons, par exemple, $\alpha = 0$; on prend la lettre b dans β facteurs, la lettre c dans γ facteurs, etc.; le terme $b^\beta c^\gamma$....., dans lequel la somme $\beta + \gamma + \ldots$.. des exposants est égale à m, est répété un nombre de fois marqué par le nombre des permutations que l'on peut former avec β lettres b, γ lettres c,.....; ce nombre est $\frac{P_m}{P_\beta P_\gamma \ldots}$; la formule générale conviendra, si l'on remplace P_α ou P_0 par l'unité.

45. Il est facile de trouver le nombre des termes du développement. Désignons par n le nombre des termes du polynôme que l'on élève à la m^e puissance. Chaque terme du développement, abstraction faite du coefficient, est de la forme $a^\alpha b^\beta c^\gamma$....., ou

$$aaa\ldots\ldots bb\ldots\ldots cc\ldots\ldots;$$

il contient m lettres en tout; c'est une combinaison m à m des n lettres a, b, c,..... k, avec répétition; le nombre des termes du développement est donc égal au nombre des combinaisons de n lettres m à m avec répétition, c'est-à-dire à

$$(6)\quad D_n^m = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots\ldots(n+m-1)}{1.2.3\ldots\ldots m}.$$

Ce nombre est égal au nombre des combinaisons de $n+m-1$ lettres m à m sans répétition; mais on sait que $C_{n+m-1}^m = C_{n+m-1}^{n-1}$; on aura donc

(7) $$D_n^m = \frac{(m+1)(m+2)\ldots\ldots(m+n-1)}{1.2.\ldots\ldots(n-1)}.$$

On appliquera l'une ou l'autre de ces formules suivant les cas.

46. Considérons en particulier le carré $(a+b+c+\ldots)^2$ d'un polynôme, ou le produit

$$(a+b+c+\ldots\ldots)\times(a+b+c+\ldots\ldots)$$

de deux polynômes égaux. Si l'on prend la même lettre a dans les deux polynômes, on a le terme a^2 : comme on ne peut obtenir ce terme que de cette manière, son coefficient est l'unité. Si l'on prend une lettre a dans l'un des polynômes, et une autre lettre b dans l'autre, on a le terme ab; il est évident que ce terme peut être obtenu de deux manières, soit qu'on prenne la lettre a dans le premier polynôme et la lettre b dans le second, ou la lettre a dans le second et la lettre b dans le premier; ces deux manières correspondent aux deux arrangements ab et ba; le coefficient de ce terme sera donc égal à 2, et l'on aura $2ab$. On conclut de là que *le carré d'un polynôme est égal à la somme des carrés de tous ses termes, plus deux fois la somme des produits des termes deux à deux.*

Considérons encore le cube $(a+b+c+\ldots\ldots)^3$ d'un polynôme. D'après la formule générale (5), le développement contiendra trois sortes de termes : 1° des termes de la forme a^3 ayant pour coefficients l'unité; 2° des termes de la forme a^2b ayant pour coefficients $\frac{P_3}{P_2P_1}$ ou 3; 3° des termes de la forme abc, ayant pour coefficients $\frac{P_3}{P_1P_1P_1}$ ou 6. On en conclut que *le cube d'un polynôme est égal à la somme des*

cubes de ses différents termes, plus trois fois la somme des produits que l'on obtient en multipliant le carré d'un terme quelconque par un autre terme, plus six fois la somme des produits des termes trois à trois.

Si l'on appliquait la formule générale (5) au développement de la puissance d'un binôme, on aurait

$$(a+b)^m = \sum \frac{P_m}{P_\alpha P_\beta} a^\alpha b^\beta.$$

Cette formule est la même que celle trouvée précédemment (n° 34), puisque $\alpha+\beta=m$, et que (n° 30)

$$\frac{P_m}{P_\alpha . P_{m-\alpha}} = C_m^\alpha = C_m^{m-\alpha}.$$

Racine d'un polynôme.

47. Proposons-nous d'abord d'extraire la racine carrée d'un polynôme entier P, ordonné suivant les puissances décroissantes d'une lettre x; nous supposerons qu'il existe un polynôme entier qui, élevé au carré, reproduise exactement le polynôme proposé. Représentons par les lettres a, b, c,..... les différents termes de ce polynôme racine, ordonné aussi suivant les puissances décroissantes de x. Nous aurons

$$\begin{aligned} P &= (a+b+c+\ldots\ldots)^2 \\ &= a^2 + 2a(b+c+\ldots\ldots) + (b+c+\ldots\ldots)^2. \end{aligned}$$

Le terme a^2, étant d'un degré plus élevé que tous les autres termes du développement, et ne se réduisant par conséquent avec aucun autre, est égal au premier terme du polynôme P; on obtiendra donc le premier terme a de la racine, en extrayant la racine carrée du premier terme du polynôme

proposé. Si du polynôme on retranche le carré du premier terme de la racine, et si l'on appelle R le reste, il vient

$$R = 2a(b + c + \ldots\ldots) + (b + c + \ldots\ldots)^2.$$

Dans le second membre, la première partie est d'un degré plus élevé que la seconde; or le premier terme de cette première partie est $2ab$; ce terme $2ab$, étant ainsi d'un degré plus élevé que tous les autres, est égal au premier terme du polynôme reste R; on obtiendra donc le second terme b de la racine en divisant le premier terme du reste R par $2a$, c'est-à-dire par le double du premier terme de la racine.

Si l'on groupe maintenant les deux premiers termes de la racine qui sont connus, on a

$$P = [(a + b) + (c + d + \ldots\ldots)]^2$$
$$= (a + b)^2 + 2(a + b)(c + d + \ldots\ldots) + (c + d + \ldots\ldots)^2.$$

En retranchant du polynôme proposé le carré de la somme des deux premiers termes de la racine et appelant R' le nouveau reste, on a

$$R' = 2(a + b)(c + d + \ldots\ldots) + (c + d + \ldots\ldots)^2.$$

Dans le second membre, la première partie est d'un degré plus élevé que la seconde, et le premier terme de cette première partie est $2ac$; le terme $2ac$, étant ainsi d'un degré plus élevé que tous les autres, est égal au premier terme du polynôme R'; on obtiendra donc le troisième terme c de la racine en divisant le premier terme du second reste R' par $2a$, c'est-à-dire par le double du premier terme de la racine.

Si l'on groupe actuellement les trois premiers termes de la racine, on a

$$P = [(a + b + c) + (d + e + \ldots\ldots)]^2$$
$$= (a + b + c)^2 + 2(a + b + c)(d + e + \ldots) + (d + e + \ldots)^2.$$

Retranchons du polynôme proposé le carré de la somme des trois premiers termes de la racine, et appelons R″ le nouveau reste, nous aurons

$$R'' = 2(a+b+c)(d+e+\ldots\ldots) + (d+e+\ldots\ldots)^2.$$

Le premier terme de ce reste est égal à $2ad$; si on le divise par $2a$, on obtiendra le quatrième terme d de la racine.

On continuera de cette manière jusqu'à ce qu'on arrive au dernier terme de la racine, tel qu'on l'obtient directement. Car le même raisonnement s'applique lorsque le polynôme est ordonné par rapport aux puissances croissantes de x; on obtiendra donc immédiatement le dernier terme en extrayant la racine carrée du dernier terme du polynôme proposé. Si l'opération conduit à ce dernier terme, et si le reste suivant est seul, on en conclut que le polynôme proposé est carré parfait. Il est clair qu'on peut changer les signes de tous les termes de la racine, ce qui ne change pas le carré.

On peut simplifier un peu le calcul des restes, comme on le fait en arithmétique. Quand on a trouvé les deux premiers termes de la racine, il faut, du polynôme proposé, retrancher $(a+b)^2$, c'est-à-dire $a^2+2ab+b^2$; comme on a déjà retranché a^2, il suffit de retrancher du reste la quantité $2ab+b^2$ ou $(2a+b)b$. De même, quand on a trouvé le troisième terme c, il faut, du polynôme proposé, retrancher $(a+b+c)^2$, c'est-à-dire $(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$; comme on a déjà retranché $(a+b)^2$, il suffit de retrancher du second reste R′ la quantité $2(a+b)c+c^2$ ou $(2a+2b+c)c$. En général, quand on aura trouvé un nouveau terme de la racine, à la droite du double de la partie précédemment obtenue, on écrira ce nouveau terme, on multipliera par ce terme, et l'on retranchera le produit du reste précédent.

Considérons, par exemple, le polynôme

$$25x^6 - 70x^5 + 89x^4 - 96x^3 + 58x^2 - 24x + 9.$$

Pour que ce polynôme soit le carré d'un polynôme entier, il faut d'abord que le premier et le dernier termes soient des carrés parfaits; c'est ce qui a lieu ici. Si le polynôme racine existe, son premier terme sera $5x^3$, son dernier terme ± 3. En effectuant l'opération comme nous l'avons dit, on arrive au dernier terme -3, et à un reste nul. La racine cherchée est $5x^3 - 7x^2 + 4x - 3$.

$$\begin{array}{r|l}
25x^6 - 70x^5 + 89x^4 - 96x^3 + 58x^2 - 24x + 9 & \underline{5x^3 - 7x^2 + 4x - 3} \\
\underline{+70x^5 - 49x^4 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} & 10x^3 - 7x^2 \\
+40x^4 - 96x^3 + 58x^2 - 24x + 9 & ,\ 10x^3 - 14x^2 + 4x \\
\underline{-40x^4 + 56x^3 - 16x^2 \qquad\qquad\quad} & 10x^3 - 14x^2 + 8x - 3 \\
-30x^3 + 42x^2 - 24x + 9 & \\
\underline{+30x^3 - 42x^2 + 24x - 9} & \\
0 \qquad\qquad &
\end{array}$$

48. On suivra une marche analogue pour l'extraction de la racine m^e d'un polynôme. Supposons toujours le polynôme P ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x, et appelons encore a, b, c,.... les différents termes de la racine. On a

$$\begin{aligned} P &= (a + b + c + \ldots\ldots)^m \\ &= a^m + ma^{m-1}(b + c + \ldots) + \frac{m(m-1)}{1.2} a^{m-2}(b + c + \ldots)^2 + \ldots \end{aligned}$$

Le premier terme du polynôme proposé est égal à a^m; en extrayant la racine m^e de ce premier terme, on obtiendra le premier terme de la racine. Si du polynôme on retranche a^m, on a

$$R = ma^{m-1}(b + c + \ldots) + \frac{m(m-1)}{1.2} a^{m-2}(b + c + \ldots)^2 + \ldots;$$

le premier terme du reste R est égal à $ma^{m-1}b$; en divisant ce premier terme par ma^{m-1}, on obtiendra le second terme b de la racine. Considérons maintenant l'expression

$$P = [(a+b)+(c+d+\ldots\ldots)]^m$$
$$= (a+b)^m + m(a+b)^{m-1}(c+d+\ldots\ldots)+\ldots\ldots;$$

et retranchons $(a+b)^m$, nous aurons un reste

$$R' = m(a+b)^{m-1}(c+d+\ldots\ldots)+\ldots\ldots$$

dont le premier terme est $ma^{m-1}c$; en divisant ce premier terme par ma^{m-1}, on obtiendra le troisième terme c de la racine, et ainsi de suite.

CHAPITRE IV.

NOMBRES FIGURÉS, PILES DE BOULETS.

Pyramide à base carrée.

49. Considérons une pyramide ayant pour base un carré de m boulets au côté; sur la base est placé un autre carré ayant $m-1$ boulets au côté; sur celui-ci un carré ayant $m-2$ boulets, et ainsi de suite jusqu'au sommet formé d'un seul boulet. Le nombre des boulets contenus dans chaque tranche étant un carré parfait, le nombre total des boulets contenus dans la pyramide est la somme des carrés des m premiers nombres entiers.

Voici une manière très-simple d'obtenir cette somme. Si dans l'égalité

$$(m+1)^3 = m^3 + 3m^2 + 3m + 1,$$

on donne à m successivement les m valeurs $1, 2, 3 \ldots\ldots m$, on a

$$\begin{aligned} 2^3 &= 1^3 + 3.1^2 + 3.1 + 1, \\ 3^3 &= 2^3 + 3.2^2 + 3.2 + 1, \\ 4^3 &= 3^3 + 3.3^2 + 3.3 + 1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (m+1)^3 &= m^3 + 3.m^2 + 3m + 1; \end{aligned}$$

en faisant la somme et supprimant les nombres $2^3, 3^3, \ldots\ldots, m^3$, qui se trouvent dans les deux membres, on obtient l'égalité

$$\begin{aligned} (m+1)^3 = 1^3 &+ 3(1^2 + 2^2 + 3^2 \ldots\ldots + m^2) \\ &+ 3(1 + 2 + 3 \ldots\ldots + m) + m. \end{aligned}$$

Si, pour simplifier, on désigne par S_1 la somme des m premiers nombres entiers, et par S_2 la somme de leurs carrés, cette égalité devient

$$(m+1)^3 = 1 + 3(S_2 + S_1) + m;$$

on en déduit

$$\begin{aligned} 3(S_2 + S_1) &= (m+1)^3 - (m+1) = (m+1)(m^2 + 2m) \\ &= m(m+1)(m+2). \end{aligned}$$

La somme des m premiers nombres entiers étant la somme des termes d'une progression arithmétique, on a

$$S_1 = \frac{m(m+1)}{2}.$$

Si l'on remplace S_1 par sa valeur, il vient

$$3S_2 = m(m+1)(m+2) - \frac{3m(m+1)}{2} = \frac{m(m+1)(2m+1)}{2};$$

d'où

(1) $$S_2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}.$$

Telle est la formule qui donne le nombre des boulets contenus dans la pyramide à base carrée. Par exemple, si $m = 10$, on trouve $S_2 = 385$.

Pyramide triangulaire.

50. Une pile de boulets triangulaire a pour base un triangle équilatéral ayant m boulets au côté; sur la base est placé un autre triangle ayant $m - 1$ boulets au côté; sur celui-ci un triangle ayant $m - 2$ boulets au côté, et ainsi de suite jusqu'au sommet qui est formé d'un seul boulet.

Chaque triangle est formé de lignes de boulets disposées comme l'indique la figure; la première ligne contient 1 boulet, la seconde 2, la troisième 3, etc.; de sorte que le nombre des boulets contenus dans un triangle ayant m boulets de côté est la somme des m premiers nombres entiers, c'est-à-dire $\frac{m(m+1)}{2}$. Mais on a

$$\frac{m(m+1)}{2} = \frac{m^2}{2} + \frac{m}{2}.$$

Il en résulte que le nombre total des boulets, contenus dans la pile triangulaire qui a m boulets au côté de la base, est égal à la moitié de la somme des carrés des m premiers nombres, plus la moitié de la somme de ces m premiers nombres. On a donc en désignant par x le nombre cherché

$$x = \frac{S_2 + S_1}{2}.$$

Nous avons trouvé dans le numéro précédent

$$3(S_2 + S_1) = m(m+1)(m+2).$$

On en déduit

$$(2) \qquad x = \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}.$$

Par exemple, si la pyramide a 8 boulets au côté à la base, elle renferme $\frac{8.9.10}{1.2.3}$ ou 120 boulets.

Pile à base rectangulaire.

51. Imaginons une pile dont la base soit un rectangle ayant m boulets d'un côté et n de l'autre, m étant plus grand que n; sur la base est placé un second rectangle de $m-1$ boulets sur $n-1$; sur celui-ci un troisième rectangle de $m-2$ boulets sur $n-2$; et ainsi de suite. On arrive enfin au n^e rectangle qui a $m-(n-1)$ boulets à l'un de ses côtés sur $n-(n-1)$ à l'autre, c'est-à-dire $m-n+1$ sur 1; c'est une ligne ou arête de $m-n+1$ boulets qui forme le sommet de la pile.



Si l'on redescend du sommet à la base, on trouve d'abord la ligne supérieure de $m-n+1$ boulets; au-dessous est un rectangle composé de 2 files renfermant chacune $m-n+2$ boulets; au-dessous un troisième rectangle renfermant $3(m-n+3)$ boulets et ainsi de suite. En général le rectangle de rang k, à partir du sommet, contient $k(m-n+k)$ boulets; mais on a

$$k(m-n+k) = k(m-n) + k^2.$$

Si dans cette égalité on donne à k successivement les n va-

leurs 1, 2, 3,....., n, afin d'obtenir les n rectangles dont se compose la pile, on a

$$
\begin{aligned}
1(m-n+1) &= 1(m-n)+1^2,\\
2(m-n+2) &= 2(m-n)+2^2,\\
3(m-n+3) &= 3(m-n)+3^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
n(m-n+n) &= n(m-n)+n^2.
\end{aligned}
$$

En faisant la somme, on voit que le nombre total des boulets contenus dans la pile rectangulaire est égal à la somme des carrés des n premiers nombres, plus la somme de ces nombres multipliés par $m-n$. On a donc, en appelant x le nombre cherché,

$$x = S_2 + (m-n)S_1 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{(m-n)n(n+1)}{2},$$

ou, plus simplement,

$$(3) \qquad x = \frac{n(n+1)(3m-n+1)}{6}.$$

Par exemple, si le rectangle de base a 15 boulets d'un côté sur 10 de l'autre, la pile contiendra $\frac{10.11.36}{6}$ ou 660 boulets.

La méthode que nous avons employée revient à décomposer un rectangle quelconque $k(m-n+k)$ en un carré k^2 et un rectangle $(m-n)k$ comme l'indique la figure, et il est à remarquer que ce second rectangle a un côté constant $m-n$, ce qui permet de faire la somme.

Somme des puissances semblables des termes d'une progression arithmétique.

52. La méthode que nous avons suivie pour trouver la somme des carrés des m premiers nombres peut être employée pour trouver la somme des puissances semblables des termes d'une progression arithmétique. Considérons une progression arithmétique

$$\div a.b.c.\ldots\ldots k,$$

formée de n termes et appelons r la raison. Nous désignerons par S_m la somme des m^{es} puissances des différents termes de cette progression. On a, d'après la formule du binôme,

$$b^{m+1}=(a+r)^{m+1}=a^{m+1}+C^1_{m+1}a^m r+C^2_{m+1}a^{m-1}r^2\ldots+r^{m+1},$$
$$c^{m+1}=(b+r)^{m+1}=b^{m+1}+C^1_{m+1}b^m r+C^2_{m+1}b^{m-1}r^2\ldots+r^{m+1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(k+r)^{m+1}=k^{m+1}+C^1_{m+1}k^m r+C^2_{m+1}k^{m-1}r^2+\ldots+r^{m+1}.$$

Si l'on ajoute ces égalités, les termes b^{m+1}, $c^{m+1}\ldots\ldots$, k^{m+1} disparaissent, et l'on obtient la relation

$$(4)\quad (k+r)^{m+1}-a^{m+1}=C^1_{m+1}rS_m+C^2_{m+1}r^2S_{m-1}\ldots+C^1_{m+1}r^mS_1+nr^{m+1}.$$

Si l'on fait $m=2$, cette relation donnera S_2, au moyen de S_1. Si l'on fait ensuite $m=3$, elle donnera S_3, au moyen de S_1 et de S_2; et ainsi de suite.

Cherchons, par exemple, la somme des cubes des n premiers nombres; on fera $a=1$, $r=1$, $k=n$, $m=3$; la relation précédente devient

$$(n+1)^4-1=4S_3+6S_2+4S_1+n,$$

en remplaçant S_1 et S_2 par leurs valeurs (n° 49), on en déduit

$$S_3 = \left[\frac{n(n+1)}{1.2}\right]^2.$$

La somme des cubes des n premiers nombres est égale au carré de la somme de ces nombres.

On peut mettre la relation (4) sous une forme symbolique, qu'il est plus aisé de se rappeler.

Concevons, en effet, que l'on développe l'expression $(S+r)^{m+1}$ d'après la formule du binôme et que l'on remplace ensuite les exposants de la lettre S par des indices, c'est-à-dire qu'au lieu de S^m on écrive S_m; le dernier terme du développement étant r^{m+1}, on écrira $S_0 r^{m+1}$, ce qui fait nr^{m+1}, puisque $S_0 = n$; la relation (4) pourra être mise sous la forme

$$(5) \qquad (S+r)^{m+1} - S^{m+1} = (k+r)^{m+1} - a^{m+1}.$$

Triangle de Pascal.

53. On appelle triangle arithmétique, ou triangle de Pascal, le tableau suivant qui renferme les coefficients des puissances successives du binôme.

1	1									
1	2	1								
1	3	3	1							
1	4	6	4	1						
1	5	10	10	5	1					
1	6	15	20	15	6	1				
1	7	21	35	35	21	7	1			
1	8	28	56	70	56	28	8	1		
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

. . . .

La première ligne horizontale renferme les coefficients de la première puissance du binôme $x + a$, la deuxième les coefficients du développement de $(x + a)^2$, la troisième ceux de $(x + a)^3$; en général la m^e ligne horizontale renferme les coefficients du développement de $(x + a)^m$, c'est-à-dire en mettant à part le premier coefficient 1, les nombres de combinaisons de m objets, pris 1 à 1, 2 à 2, etc.

En faisant abstraction de la colonne des unités, on voit que la première colonne verticale contient les nombres de combinaisons un à un de 1, 2, 3,..... objets, la seconde les nombres de combinaisons deux à deux de 2, 3, 4,..... objets; en général la n^e colonne (toujours abstraction faite de celle des unités que l'on ne compte pas) contient les nombres de combinaisons n à n de n, $n+1$, $n+2$,..... objets.

En un mot la m^e ligne horizontale renferme les nombres de combinaisons de m objets, la n^e colonne verticale les nombres de combinaisons n à n. Ainsi le nombre placé à l'intersection de la m^e ligne horizontale et de la n^e colonne verticale est C_m^n.

Chaque nombre du triangle arithmétique égale le nombre placé au-dessus de lui, plus le nombre placé à gauche de ce dernier. Ainsi le nombre 35 de la 7e ligne égale le nombre 20 placé au-dessus de lui, plus le nombre 15 placé à gauche de 20. Ceci résulte de la relation

$$C_m^n = C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1},$$

que nous avons démontrée au n° 31; C_{m-1}^n est effectivement placé au-dessus de C_m^n dans la même colonne verticale, et C_{m-1}^{n-1} est placé à gauche de C_{m-1}^n dans la même ligne horizontale.

Cette propriété sert à la formation du tableau : supposons écrites les trois premières lignes, on dira 3 et 1 font 4, 3 et 3 font 6, 1 et 3 font 4; écrivant à la suite l'unité, on aura la quatrième ligne. On dira de même 4 et 1 font 5, 6 et 4 font 10, 4 et 6 font 10, 1 et 4 font 5, et l'on écrira à la suite l'unité, ce qui donne la cinquième ligne, et ainsi de suite. Chaque ligne horizontale se déduit de la ligne précédente.

54. Théorème. *La somme des* m *premiers nombres d'une colonne verticale quelconque est le* m^e *nombre de la colonne suivante.*

En d'autres termes, le m^e nombre d'une colonne verticale quelconque est la somme des m premiers nombres de la colonne précédente; ceci résulte de la loi de formation du tableau. Considérons, par exemple, le nombre 56, sixième nombre de la troisième colonne (on fait toujours abstraction de la colonne des unités); ce nombre égale 21 plus 35, mais 35 égale 15 plus 20, 20 égale 10 plus 10, 10 égale 6 plus 4, 4 égale 3 plus 1; on a donc

$$56 = 21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1;$$

donc ce nombre 56 est la somme des six premiers nombres de la deuxième colonne.

A l'inspection du tableau on voit que le premier nombre de la n^e colonne verticale se trouve dans la n^e ligne horizontale; le second dans la $n + 1^e$, le troisième dans la $n + 2^e$. En général le m^e nombre de la n^e colonne verticale se trouve dans la $n + m - 1$ ligne horizontale; c'est donc

$$C^n_{m+n-1} = \frac{(m+n-1)(m+n-2)\ldots\ldots m}{1.2.3\ldots\ldots n},$$

ou

$$(6) \qquad \frac{m(m+1)\ldots\ldots(m+n-1)}{1.2\ldots\ldots n}.$$

55. Les propriétés du triangle de Pascal permettent de trouver immédiatement le nombre des boulets contenus dans une pile triangulaire, nombre que nous avons déjà obtenu par un autre procédé. La première colonne verticale comprend les nombres entiers consécutifs, ou les nombres figurés du premier ordre. Un triangle de m boulets au côté étant formé de m files successives, le nombre des boulets contenus dans ce triangle est la somme des m premiers nombres de la première colonne verticale; c'est le m^e nombre de la seconde colonne, soit, en faisant $n=2$ dans la formule (6),

$$\frac{m(m+1)}{1.2}.$$

Ainsi les nombres 1, 3, 6,....., de la deuxième colonne verticale du triangle arithmétique sont les nombres *triangulaires*, ou les nombres figurés du second ordre. Ces nombres sont représentés par la formule générale $\frac{m(m+1)}{1.2}$.

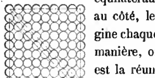
Une pile triangulaire de m boulets au côté de sa base est formée de m triangles successifs; si l'on descend du sommet à la base, on voit que la pyramide est la somme des m premiers nombres triangulaires, c'est-à-dire des m premiers nombres de la deuxième colonne verticale du triangle arithmétique; c'est le m^e nombre de la troisième colonne, soit, en faisant $n=3$ dans la formule (6).

$$\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}.$$

Ainsi les nombres 1, 4, 10, 20, 35,....., inscrits dans la troisième colonne verticale sont les nombres pyramidaux,

ou les nombres figurés du troisième ordre. Les nombres de la colonne suivante expriment des sommes de pyramides, et ainsi de suite.

Après avoir évalué de cette manière la pyramide triangulaire, on obtient aisément la pyramide à base carrée. On peut décomposer le carré de base en deux triangles



équilatéraux ayant, le premier m boulets au côté, le second $m-1$; si l'on imagine chaque carré, décomposé de la même manière, on voit que la pyramide carrée est la réunion de deux pyramides triangulaires ayant, la première m boulets au côté de sa base, la seconde $m-1$. Le nombre des boulets contenus dans la pyramide carrée est donc la somme des nombres de boulets

$$\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}+\frac{(m-1)m(m+1)}{1.2.3}$$

contenus dans les deux pyramides triangulaires, soit, en simplifiant,

$$\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}.$$

Exercices.

1° Trouver le plus grand terme du développement de $(a+b)^m$. Déterminer ensuite la limite du rapport des exposants de a et de b dans ce plus grand terme, quand m augmente indéfiniment.

2° Trouver le plus grand terme du développement de $(a+b+c)^m$. Déterminer ensuite les limites des rapports des exposants de a, b, c dans ce plus grand terme, quand m augmente indéfiniment.

3° Dans un jeu de 32 cartes, on tire trois cartes au hasard. Quelle est la probabilité que ces trois cartes formeront un brelan, c'est-à-dire seront trois as, ou trois rois, ou trois dames, etc. ?

4° Dans un jeu de 32 cartes, on tire encore trois cartes au hasard. Quelle est la probabilité que ces trois cartes seront trois cartes de même couleur formant 31 (l'as compte pour 11)?

5° Dans un jeu de dominos on prend deux dominos au hasard. Quelle est la probabilité que ces deux dominos pourront se placer l'un à la suite de l'autre?

6° Quelle est la probabilité des différents nombres dans le jet de deux dés? Quel est le nombre qui offre la plus grande probabilité?

7° Une urne renferme deux boules blanches, deux noires et deux rouges. On en tire trois au hasard. Quelle est la probabilité qu'on amènera une boule blanche, une noire et une rouge?

8° On a quatre lettres a, trois lettres b et deux lettres c. Combien peut-on former d'arrangements cinq à cinq avec ces lettres?

9° Combien peut-on former de combinaisons avec $n+2$ objets pris n à n, les deux derniers objets pouvant être répétés?

10° Étant donnés n points dont trois ne sont pas en ligne droite, on les joint deux à deux par des droites. Quel est le nombre des points d'intersection de ces droites entre elles?

11° De combien de manières peut-on partager en triangles par des diagonales un polygone convexe de n côtés?

LIVRE III.

SÉRIES.

CHAPITRE PREMIER.

PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES DES SÉRIES.

56. On appelle *série*, en mathématique, une suite indéfinie de quantités qui se déduisent les unes des autres suivant une loi déterminée. Ces quantités sont les *termes* de la série.

Lorsque la somme des n premiers termes de la série tend vers une limite finie et déterminée, quand on prend un nombre de termes de plus en plus grand, on dit que la série est *convergente*. Dans le cas contraire, on dit qu'elle est *divergente*.

Nous désignerons les termes successifs d'une série par

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots\ldots$$

et par S_n la somme des n premiers termes :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_{n-1}.$$

Si la somme S_n tend vers une limite finie S, quand n aug-

mente indéfiniment, la série est convergente; sinon, elle est divergente.

Il importe de bien préciser la définition des séries convergentes. Quand on dit que la somme des n premiers termes de la série tend vers une limite finie et déterminée S, cela signifie que l'on peut prendre n assez grand pour que la somme S_n, et chacune des sommes suivantes S_{n+1}, S_{n+2},....., diffère de la limite S d'une quantité moindre qu'une quantité donnée, si petite qu'elle soit.

La progression géométrique, prolongée à l'infini, nous donne un premier exemple de série. Soit a le premier terme, r la raison; la série s'écrit

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3, \ldots\ldots$$

La loi de formation de la série est très-simple; on déduit chaque terme du précédent en le multipliant par un nombre constant r.

Si la raison r, en valeur absolue, est plus grande que l'unité, les termes de la série vont en augmentant indéfiniment; il est clair que, dans ce cas, la somme des termes ne peut tendre vers une limite déterminée; la série est divergente.

Si la raison, en valeur absolue, est plus petite que l'unité, les termes de la série diminuent indéfiniment, de manière à devenir plus petits que toute quantité donnée. Nous avons trouvé pour la somme des n premiers termes (Ire partie, livre IV, chap. II),

$$S_n = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}.$$

Si l'on prend un nombre de termes de plus en plus grand,

la quantité $\frac{ar^n}{1-r}$ devenant plus petite que toute quantité donnée, on voit que la somme des termes tend vers une limite finie et déterminée,

$$S = \frac{a}{1-r}.$$

Ainsi, dans ce cas, la série est convergente; cette limite $\frac{a}{1-r}$ est ce que l'on appelle la somme des termes de la série.

Quand la raison r est positive, ainsi que le premier terme a, tous les termes étant positifs, la somme des termes va constamment en augmentant, à mesure qu'on en prend un nombre plus grand, et elle se rapproche de plus en plus de la limite S. Quand la raison est négative, la somme est alternativement plus grande et plus petite que la limite S, dont elle se rapproche en oscillant de part et d'autre.

57. *Une première condition nécessaire pour qu'une série soit convergente, c'est que ses termes tendent vers zéro.* Nous ferons voir, en effet, que, dans toute série convergente, on peut prendre n assez grand pour que le terme u_n et chacun des termes suivants u_{n+1}, u_{n+2},...., soit plus petit qu'une quantité donnée α, si petite qu'elle soit. Puisque la série est convergente, on peut prendre n assez grand pour que chacune des sommes

$$S_n,\ S_{n+1},\ S_{n+2},\ .\ .\ .\ .\ .$$

diffère de la limite S d'une quantité moindre que $\frac{\alpha}{2}$. Les deux sommes S_n et S_{n+1}, différant de la limite S d'une quantité moindre que $\frac{\alpha}{2}$, diffèrent entre elles d'une quantité moindre

que α; mais la différence de ces deux sommes est le terme u_n de la série; on en conclut que ce terme u_n est plus petit que α. De même, les deux sommes S_{n+1} et S_{n+2}, différant de la limite S d'une quantité moindre que $\frac{\alpha}{2}$, leur différence, c'est-à-dire le terme u_{n+1} de la série, est moindre que α, et ainsi de suite. Ainsi chacun des termes

$$u_n,\ u_{n+1},\ u_{n+2},\ \ldots\ldots$$

est moindre que la quantité donnée α, ce qu'on exprime en disant que les termes de la série tendent vers zéro.

C'est ce qui a lieu dans la progression géométrique décroissante; ses termes deviennent en effet plus petits que toute quantité donnée.

58. Mais cette condition n'est pas suffisante: les termes d'une série peuvent tendre vers zéro sans que la série soit convergente. Un exemple très-simple mettra cette proposition en évidence. Considérons la série

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots\ldots,$$

formée de fractions ayant pour numérateurs l'unité, et pour dénominateurs les nombres entiers consécutifs; le terme général $\frac{1}{n}$ tend vers zéro, et cependant la série est divergente.

Prenons, en effet, le troisième et la quatrième terme

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4},$$

et remplaçons $\frac{1}{3}$ par la quantité plus petite $\frac{1}{4}$, nous aurons

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4},$$

plus simplement

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{2}.$$

Prenons maintenant les quatre termes suivants

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8},$$

et remplaçons chacun des trois premiers par la quantité plus petite $\frac{1}{8}$, nous aurons

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{4}{8}=\frac{1}{2}.$$

En prenant de même les huit termes suivants, et remplaçant chacun d'eux par $\frac{1}{16}$, on aura

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\cdots\cdots+\frac{1}{16}>\frac{8}{16}=\frac{1}{2},$$

et ainsi de suite indéfiniment. Nous formerons ainsi une infinité de groupes dont chacun est plus grand que $\frac{1}{2}$; donc la somme des termes augmente au delà de toute limite, et par conséquent la série est divergente.

59. Quand nous disons que les termes d'une série convergente tendent vers zéro, cela ne signifie pas qu'ils diminuent continuellement, de manière que chacun d'eux soit plus petit que le précédent. Écrivons, par exemple, la progression décroissante

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots\cdots$$

dans l'ordre suivant

$$\frac{1}{2}+1+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{32}+\frac{1}{16}+\ldots\ldots$$

la série reste évidemment convergente; les termes tendent vers zéro, mais avec des alternatives de croissance et de décroissance.

Après ces considérations préliminaires, nous distinguerons deux sortes de séries, celles dont tous les termes sont positifs, et celles dont les termes sont, les uns positifs, les autres négatifs.

Série dont tous les termes sont positifs.

60. Théorème I. *Une série dont les termes sont positifs, et dont la somme des* n *premiers termes conserve une valeur finie, quand* n *augmente indéfiniment, est convergente.*

On dit qu'une grandeur variable conserve une valeur finie, lorsqu'elle reste constamment inférieure à une grandeur déterminée A que l'on peut assigner. Puisque les termes de la série proposée sont tous positifs, la somme des n premiers termes va en augmentant à mesure que n augmente. Si elle conserve une valeur finie, la somme croissante tend évidemment vers une certaine limite qu'elle ne peut dépasser; cette limite est la plus petite des quantités auxquelles la somme variable reste constamment inférieure. Donc la série est convergente.

61. *Remarque.* Ce théorème doit être borné aux séries dont tous les termes sont positifs; lorsque les termes sont affectés de signes différents, de ce que la somme conserve une valeur finie, on ne peut plus conclure la convergence de la série. Soit, par exemple, la série

$$1-1+1-1+\ldots\ldots;$$

si l'on prend un nombre de termes de plus en plus grand, la somme est alternativement 1 et 0; quoique restant finie, elle ne tend pas vers une limite déterminée, et la série est divergente.

Ceci fait voir qu'une série peut être divergente de deux manières; soit que la somme des n premiers termes augmente à l'infini, soit que la somme, conservant une valeur finie, ne tende pas vers une limite déterminée. Dans les séries dont tous les termes sont positifs, le premier mode de divergence se présente seul, puisque la série est convergente, toutes les fois que la somme reste finie; mais, dans les séries dont les termes sont affectés de signes différents, les deux modes de divergence peuvent se présenter suivant les cas.

62. Théorème II. *Lorsqu'une série a tous ses termes positifs et respectivement moindres que les termes correspondants d'une série convergente, dont tous les termes sont positifs, cette série est aussi convergente.*

Appelons S la limite de la somme des termes de la seconde série, qui est supposée convergente. Il est clair que la somme des n premiers termes de la première série est moindre que la somme des n premiers termes de la seconde série, et par conséquent moindre que la quantité finie déterminée S. On en conclut, en vertu du théorème précédent, que la première série est convergente.

Ce théorème nous indique le moyen que l'on emploie pour reconnaître si une série est convergente; on compare la série proposée à une autre déjà connue et que l'on sait être convergente. La progression géométrique décroissante étant la seule série convergente que nous connaissions jusqu'à présent, c'est aux progressions géométriques que nous comparerons les séries.

63. Théorème III. *Lorsqu'à partir d'un certain rang le rapport d'un terme au précédent est constamment égal ou inférieur à un nombre déterminé plus petit que l'unité, la série est convergente.*

Supposons qu'à partir du terme de rang n le rapport d'un terme au précédent reste constamment égal ou inférieur à un nombre déterminé k plus petit que l'unité; je dis que la série est convergente. Faisons abstraction des n premiers termes dont la somme a une valeur finie et déterminée, et considérons la série

$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots\ldots$$

formée par les termes suivants.

On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < k,$$

$$\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} < k,$$

$$\frac{u_{n+3}}{u_{n+2}} < k,$$

$$\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots$$

De la première inégalité on déduit

$$u_{n+1} < ku_n.$$

La seconde donne

$$u_{n+2} < ku_{n+1},$$

et, si l'on remplace le terme u_{n+1} par la quantité plus grande ku_n, on a *à fortiori*

$$u_{n+2} < k^2 u_n.$$

On déduit de même de la troisième

$$u_{n+3} < ku_{n+2},$$

et, en remplaçant u_{n+2} par la quantité plus grande k^2u_n,

$$u_{n+3} < k^3u_n,$$

et ainsi de suite.

Il résulte de là que les termes de la série

(1) $$u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots\ldots$$

sont respectivement moindres que les termes correspondants de la progression géométrique décroissante

(2) $$u_n + ku_n + k^2u_n + \ldots\ldots$$

dont la raison k est inférieure à l'unité. En vertu du théorème précédent, on en conclut que la série est convergente.

Soit, par exemple, la série

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots\ldots$$

Le rapport du second terme au premier est $\frac{1}{2}$, du troisième au second $\frac{1}{3}$, du quatrième au troisième $\frac{1}{4}$, et ainsi de suite; ce rapport étant constamment égal ou inférieur à $\frac{1}{2}$, la série est convergente.

Quand on prend les n premiers termes de la série proposée et qu'on néglige les suivants, l'erreur commise, ou la limite de la somme des termes de la série (1) est moindre que la limite de la somme des termes de la progression (2), c'est-à-dire moindre que $\frac{u_n}{1-k}$.

64. *Corollaire.* On facilite beaucoup l'application de ce théorème par les considérations suivantes. Ordinairement

le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ d'un terme au précédent tend vers une limite déterminée, que nous désignerons par λ, lorsque n augmente indéfiniment. Il y a trois cas à distinguer, suivant que cette limite λ du rapport est inférieure, supérieure, ou égale à l'unité.

1° $\lambda < 1$. Choisissons un nombre arbitraire mais déterminé k, compris entre 1 et λ, c'est-à-dire plus petit que l'unité, mais plus grand que λ. Le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, se rapprochant indéfiniment de sa limite λ, restera, à partir d'un certain rang, constamment inférieur au nombre k; donc, en vertu du théorème démontré, la série est convergente.

2° $\lambda > 1$. Choisissons un nombre arbitraire k entre 1 et λ. Le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, se rapprochant indéfiniment de sa limite λ, restera, à partir d'un certain rang, constamment supérieur à k, et l'on aura

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > k, \quad \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} > k, \quad \frac{u_{n+3}}{u_{n+2}} > k, \ldots\ldots$$

On en déduit

$$u_{n+1} > ku_n, \quad u_{n+2} > k^2 u_n, \quad u_{n+3} > k^3 u_n, \ldots\ldots$$

Les termes de la série, étant plus grands que les termes d'une progression géométrique croissante, augmentent à l'infini. Donc la série est divergente.

3° $\lambda = 1$. Quand le rapport d'un terme au précédent tend vers une limite égale à l'unité, il y a ambiguïté : la série est tantôt convergente, tantôt divergente. Le théorème précédent est insuffisant pour décider la convergence de la série ; il faut alors recourir à des moyens particuliers.

Exemples.

1° Soit la série

$$\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots\ \ldots$$

dont le terme de rang n est

$$\frac{x^n}{1.2.3.\ldots\ldots n}$$

le rapport de ce terme au précédent est

$$\frac{x}{n};$$

ce rapport a pour limite zéro, quand n augmente indéfiniment; donc la série est convergente, quelle que soit la valeur de x.

Quand la valeur de x est plus grande que l'unité, les termes commencent par augmenter; mais, à partir d'un certain rang plus ou moins éloigné, ils vont en diminuant. Par exemple, si $x=10+\frac{1}{2}$, les termes augmentent jusqu'au dixième terme; mais au delà, le rapport devenant plus petit que l'unité, les termes diminuent. A partir du vingtième terme, les termes décroissent plus rapidement que les termes d'une progression géométrique dont la raison est $\frac{1}{2}$.

2° Considérons la série

$$\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots\ldots,$$

qui a pour terme général

$$\frac{x^n}{n}.$$

Le rapport de ce terme au précédent est

$$\frac{n-1}{n}x \quad \text{ou} \quad \left(1-\frac{1}{n}\right)x,$$

et a pour limite x, quand n augmente indéfiniment. Ainsi, la série est convergente, quand la valeur de x est plus petite que l'unité; divergente, quand elle est plus grande que l'unité.

Quand $x=1$, on a la série divergente étudiée au n° 58.

3° Soit la série

$$1+\frac{1}{2^\mu}+\frac{1}{3^\mu}+\frac{1}{4^\mu}+\ldots\ldots$$

Le rapport d'un terme au précédent

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^\mu=\left(1-\frac{1}{n}\right)^\mu$$

a pour limite l'unité, et la convergence reste indécise. Lorsque l'exposant μ est plus grand que l'unité, on peut démontrer aisément que la série est convergente, en groupant les termes d'une manière analogue à celle que nous avons employée dans l'exemple du n° 58. Prenons d'abord le second et le troisième terme, et remplaçons le troisième $\frac{1}{3^\mu}$ par une quantité plus grande $\frac{1}{2^\mu}$, nous aurons

$$\frac{1}{2^\mu}+\frac{1}{3^\mu}<\frac{1}{2^\mu}+\frac{1}{2^\mu}=\frac{2}{2^\mu}=\frac{1}{2^{\mu-1}}.$$

Formons un second groupe avec les quatre termes suivants et remplaçons chacun d'eux par une quantité plus grande $\frac{1}{4^\mu}$, nous aurons de même

$$\frac{1}{4^\mu}+\frac{1}{5^\mu}+\frac{1}{6^\mu}+\frac{1}{7^\mu}<\frac{4}{4^\mu}=\frac{1}{4^{\mu-1}}.$$

On formera le troisième groupe avec les huit termes suivants, en remplaçant chacun par le premier d'entre eux, ce qui donne

$$\frac{1}{8^\mu}+\frac{1}{9^\mu}\cdots\cdots+\frac{1}{15^\mu}<\frac{8}{8^\mu}=\frac{1}{8^{\mu-1}},$$

et ainsi de suite indéfiniment. On voit par là que la somme des termes de la série est plus petite que la somme des termes de la progression décroissante

$$1+\frac{1}{2^{\mu-1}}+\frac{1}{4^{\mu-1}}+\frac{1}{8^{\mu-1}}+\cdots\cdots$$

dont la raison est $\frac{1}{2^{\mu-1}}$. Donc la série est convergente.

Lorsque l'exposant μ est plus petit que l'unité, les termes de la série sont respectivement plus grands que les termes de la série divergente

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots;$$

la somme des n premiers termes de cette série augmentant au delà de toute limite, il en est de même de la somme des n premiers termes de la série proposée; donc la série est divergente.

65. *Remarques.* Le rapport d'un terme au précédent ne

tend pas toujours vers une limite déterminée. Considérons, par exemple, la série

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2^2.3}+\frac{1}{2^2.3^2}+\frac{1}{2^3.3^2}+\frac{1}{2^3.3^3}+\ldots\ldots;$$

le rapport d'un terme au précédent est ici alternativement $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$; il ne tend pas vers une limite déterminée; mais comme il ne surpasse pas la quantité $\frac{1}{2}$, qui est plus petite que l'unité, la série est convergente.

Il n'est pas nécessaire pour la convergence des séries qu'à partir d'un certain rang le rapport d'un terme au précédent reste constamment inférieur à un nombre fixe plus petit que l'unité. Prenons comme exemple la progression décroissante

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots\ldots,$$

dont nous permutons les termes deux à deux, ce qui donne la série

$$\frac{1}{2}+1+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{32}+\frac{1}{16}+\ldots\ldots$$

Le rapport d'un terme au précédent est ici alternativement 2 et $\frac{1}{8}$; ce rapport ne reste pas, à partir d'un certain rang, inférieur à une quantité moindre que l'unité, et cependant la série est convergente.

66. Théorème IV. *Lorsqu'à partir d'un certain rang l'expression $\sqrt[n]{u_n}$ a une valeur constamment égale ou inférieure à un nombre déterminé plus petit que l'unité, la série est convergente.*

Supposons qu'à partir d'un certain rang l'expression $\sqrt[n]{u_n}$ reste constamment égale ou inférieure à un nombre déterminé k plus petit que l'unité, on aura

$$\sqrt[n]{u_n} < k,$$

et par suite

$$u_n < k^n.$$

Les termes de la série sont respectivement moindres que les termes de la progression géométrique décroissante

$$k^n + k^{n+1} + k^{n+2} + \ldots\ldots$$

et, par conséquent, la série est convergente.

67. *Corollaire.* On applique ce théorème comme le précédent. Ordinairement l'expression $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers une limite déterminée λ, quand n augmente indéfiniment. Si la limite λ est inférieure à l'unité, la série est convergente; si elle est supérieure à l'unité, la série est divergente; si elle est égale à l'unité, il y a ambiguïté.

Il est aisé de reconnaître que les limites des deux expressions $\frac{u^{n+1}}{u_n}$ et $\sqrt[n]{u_n}$ sont égales. Appelons en effet λ et λ_1 ces deux limites et supposons λ plus petit que λ_1. Si l'on considère la série

$$u_0 + u_1x + u_2x^2 + u_3x^3 + \ldots\ldots,$$

les limites pour cette série seront λx et $\lambda_1 x$; en vertu des théorèmes précédents, la série sera convergente pour toutes les valeurs de x inférieures à $\frac{1}{\lambda}$ et divergente pour toutes les valeurs de x supérieures à $\frac{1}{\lambda_1}$; elle serait en même temps convergente et divergente pour les valeurs de x comprises

entre $\frac{1}{\lambda_1}$ et $\frac{1}{\lambda}$. Il faut donc que les deux quantités λ et λ_1 soient égales.

Séries dont les termes sont affectés de signes différents.

68. Théorème V. *Lorsqu'une série dont tous les termes sont positifs est convergente, si l'on affecte les termes de signes quelconques, la série reste convergente.*

Jusqu'à présent nous n'avons considéré que des séries dont tous les termes sont positifs. Quand les termes sont affectés de signes différents, on examine si la série que l'on obtient en prenant tous les termes positivement est convergente; alors on peut affirmer que la série proposée est aussi convergente. Parmi les n premiers termes de la série proposée, les uns sont positifs, les autres négatifs; appelons P_n la somme des termes positifs, Q_n celle des termes négatifs; nous aurons

$$S_n = P_n - Q_n.$$

Mais, si l'on prend tous les termes avec le signe $+$, la somme des n premiers termes devient égale à $P_n + Q_n$; cette somme totale conservant une valeur finie, les sommes partielles P_n et Q_n conservent aussi des valeurs finies et tendent, par conséquent, vers des limites déterminées P et Q; il est clair que leur différence S_n tend vers une limite égale à $P - Q$. Donc la série proposée est convergente.

Corollaire. Le théorème III peut être étendu aux séries dont les termes sont affectés de signes quelconques. Si, à partir d'un certain rang, la valeur absolue du rapport d'un terme au précédent reste constamment inférieure à un nombre déterminé moindre que l'unité, la série est convergente. Et, en effet, nous savons que, dans ce cas, la série

formée de tous les termes pris positivement est convergente; donc la série proposée est elle-même convergente.

Séries à termes alternativement positifs et négatifs.

69. Théorème VI. *Lorsque les termes d'une série décroissent indéfiniment et sont alternativement positifs et négatifs, la série est convergente.*

Parmi les séries dont les termes sont affectés de signes différents, il faut remarquer en particulier celles dont les termes sont alternativement positifs et négatifs. Soit

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \ldots\ldots$$

une série de cette sorte; lorsque les termes tendent vers zéro et en outre diminuent continuellement, de manière que chacun soit plus petit que le précédent, on peut affirmer la convergence de la série.

Si l'on prend un, deux, trois, quatre,.... termes, on obtient les sommes successives

$$\begin{aligned} S_1 &= u_0, \\ S_2 &= u_0 - u_1, \\ S_3 &= u_0 - u_1 + u_2, \\ S_4 &= u_0 - u_1 + u_2 - u_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Considérons d'abord les sommes composées d'un nombre pair de termes, on peut les écrire sous la forme

$$\begin{aligned} S_2 &= (u_0 - u_1), \\ S_4 &= (u_0 - u_1) + (u_2 - u_3), \\ S_6 &= (u_0 - u_1) + (u_2 - u_3) + (u_4 - u_5), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

en groupant les termes deux à deux par des parenthèses :

un terme quelconque étant plus petit que le précédent, chacune des parenthèses a une valeur positive; ces diverses sommes ont donc des valeurs positives de plus en plus grandes.

Considérons maintenant les sommes composées d'un nombre impair de termes; elles ont aussi des valeurs positives; car on a

$$S_3 = S_2 + u_2, \quad S_5 = S_4 + u_4, \; . \; . \; . \; . \; .$$

Si on les écrit sous la forme suivante

$$\begin{aligned} S_1 &= u_0, \\ S_3 &= u_0 - (u_1 - u_2), \\ S_5 &= u_0 - (u_1 - u_2) - (u_3 - u_4), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

on voit qu'elles vont en diminuant de plus en plus. On a ainsi deux séries de sommes, qui vont, les premières en augmentant, les secondes en diminuant.

Chaque somme $S_{2n'+1}$ de la seconde série est plus grande qu'une somme quelconque S_{2n} de la première série. Considérons d'abord le cas où n' est plus grand que n; on a $S_{2n'+1} = S_{2n'} + u_{2n'}$, et par suite $S_{2n'+1} > S_{2n'}$; mais la somme $S_{2n'}$ est plus grande que S_{2n}; on a donc, à plus forte raison, $S_{2n'+1} > S_{2n}$. Considérons maintenant le cas où n' est plus petit que n; on a $S_{2n+1} = S_{2n} + u_{2n}$, et par suite $S_{2n+1} > S_{2n}$; la somme $S_{2n'+1}$, étant plus grande que S_{2n+1}, est à plus forte raison plus grande que S_{2n}.

Les sommes formées d'un nombre pair de termes, allant en augmentant et restant inférieures à l'une quelconque des sommes de la seconde série, tendent vers une limite déterminée. Les sommes formées d'un nombre impair de termes, allant en diminuant et restant supérieures à l'une

quelconque des sommes de la première série, tendent aussi vers une limite. La différence entre deux sommes consécutives S_n, S_{n+1}, ou le terme u_n de la série, devenant aussi petite qu'on veut, on en conclut que les deux limites sont les mêmes; donc la série est convergente.

Les sommes successives, formées d'un nombre de termes de plus en plus grand, sont alternativement trop grandes et trop petites, et tendent vers la limite en oscillant en quelque sorte de part et d'autre.

La limite S étant toujours comprise entre deux sommes consécutives S_n et S_{n+1}, la différence entre la somme S_n et la limite S est moindre que la différence entre les deux sommes consécutives S_n et S_{n+1}, c'est-à-dire moindre que le terme u_n. Ainsi, quand on prend les n premiers termes de la série, l'erreur commise est moindre que le terme suivant u_n; la somme des termes négligés est une fraction de ce terme $\pm u_n$ et a même signe que ce terme.

Exemples.

1° La série

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\dots$$

dont les signes sont alternés, et dont les termes diminuent indéfiniment est convergente. Les sommes

$$1$$
$$1 - \frac{1}{2} = 0{,}5$$
$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 0{,}8333$$
$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 0{,}5833$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

sont alternativement trop grandes et trop petites. Mais la série converge très-lentement; car si l'on prend les dix premiers termes, l'erreur étant moindre que le terme suivant ou que $\frac{1}{11}$, on n'a qu'un chiffre décimal exact; si l'on prend les cent premiers termes, on a une approximation de $\frac{1}{101}$, ou deux chiffres exacts, etc.

Nous avons vu (n° 68) que, lorsque les termes d'une série sont affectés de signes différents, si la série que l'on obtient en prenant tous les termes positivement est convergente, la série proposée est aussi convergente. Mais cette condition n'est pas nécessaire. Ainsi la série

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots\ldots$$

est convergente, tandis que la série

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots\ldots$$

formée des mêmes termes pris positivement, n'est pas convergente (n° 58).

2° La série

$$\frac{1}{1.2}-\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}-\ldots\ldots$$

converge beaucoup plus rapidement.

Si l'on prend les dix premiers termes, l'erreur commise étant moindre que le terme suivant

$$\frac{1}{1.2\ldots\ldots12}=0,000000003;$$

on a la somme par défaut avec huit décimales exactes.

Théorème général.

70. Tous les théorèmes que nous avons démontrés sur la

convergence des séries sont compris dans un théorème général qu'il est bon de connaître.

THÉORÈME VII. *Pour qu'une série soit convergente, il est nécessaire et il suffit que l'on puisse rendre* n *assez grand pour que la somme d'un nombre quelconque de termes, à la suite des* n *premiers, soit moindre qu'une quantité donnée.*

Soit la série

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots$$

Nous avons désigné par S_n la somme des n premiers termes,

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_{n-1};$$

prenons à la suite un nombre quelconque m de termes et appelons s leur somme

$$s = u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots\ldots + u_{n+m-1};$$

en ajoutant cette somme s à la première somme S_n, nous obtiendrons la somme S_{n+m} des $n+m$ premiers termes de la série. Or, si la série est convergente, on peut prendre n assez grand pour que la somme S_n et la somme S_{n+m} diffèrent de la limite S d'une quantité moindre que $\frac{\alpha}{2}$, et par conséquent diffèrent entre elles d'une quantité moindre que α; la somme s des m termes pris à la suite des n premiers est donc moindre que α, et cela est vrai si grand que soit m. Ainsi, dans une série convergente, on peut prendre n assez grand pour qu'un nombre quelconque de termes, pris à la suite des n premiers, ait une somme moindre qu'une quantité donnée, si petite qu'elle soit.

La réciproque est vraie : lorsque cette condition est remplie, la série est convergente. En effet, prenons n tel que

la somme d'un nombre quelconque de termes à la suite des n premiers soit moindre que α en valeur absolue ; il est clair que toutes les sommes

$$S_{n+1},\ S_{n+2},\ S_{n+3},\ \ldots\ldots,$$

qui se composent des n premiers termes, plus un, deux, trois,..., termes à la suite, seront comprises entre $S_n - \alpha$ et $S_n + \alpha$. Prenons maintenant un nombre plus grand n', tel que la somme d'un nombre quelconque de termes à la suite des n' premiers soit moindre que la quantité α' plus petite que α ; les sommes

$$S_{n'+1},\ S_{n'+2},\ S_{n'+3},\ \ldots\ldots$$

seront de même comprises entre $S_{n'} - \alpha'$ et $S_{n'} + \alpha'$. En général, la quantité $S_{n'} - \alpha'$ sera plus grande que $S_n - \alpha$, la quantité $S_{n'} + \alpha'$ plus petite que $S_n + \alpha$, et l'on aura ainsi resserré l'intervalle qui comprend toutes les sommes suivantes. On pourra encore le resserrer davantage et autant qu'on voudra, ce qui montre bien clairement l'existence de la limite vers laquelle tend la somme des termes de la série.

Il pourrait arriver cependant que la quantité $S_{n'} + \alpha'$ fût plus grande que $S_n + \alpha$; mais, comme on sait que les sommes $S_{n'+1}$, $S_{n'+2}$,..... sont plus petites que $S_n + \alpha$, on conserverait cette dernière quantité et l'on dirait que les sommes sont comprises entre $S_{n'} - \alpha'$ et $S_n + \alpha$. Il pourrait arriver de même que la quantité $S_{n'} - \alpha'$ fût plus petite que $S_n - \alpha$: dans ce cas, on dirait que les sommes sont comprises entre $S_n - \alpha$ et $S_{n'} + \alpha'$. Dans tous les cas, on aura formé, dans le premier intervalle 2α, un second intervalle $2\alpha'$ plus petit que le premier et comprenant toutes les sommes suivantes. Dans le second, on en formera un troisième encore plus petit, et ainsi de suite, ce qui conduit nécessairement à une limite.

CHAPITRE II.

DU NOMBRE e.

71. Considérons la série

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots\ldots$$

Les deux premiers termes donnent une somme égale à 2. Les termes suivants sont respectivement moindres que les termes de la progression géométrique

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots\ldots$$

que l'on obtient en remplaçant chacun des facteurs 3, 4, 5..... par un facteur plus petit 2, ce qui augmente les fractions; ainsi, d'après le théorème II, la série est convergente, et la somme des n premiers termes, abstraction faite des deux premiers, tend vers une limite moindre que la limite de la somme des termes de la progression, c'est-à-dire moindre que l'unité. La somme totale tend vers une limite comprise entre 2 et 3.

Cette limite est un nombre incommensurable. Supposons, en effet, qu'elle soit égale à une fraction ordinaire $\frac{m}{n}$, on aurait

$$\frac{m}{n}=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots\ldots$$

Si nous écrivons d'abord les $n+1$ premiers termes, et si nous mettons les suivants sous la forme

$$\frac{1}{1.2.3\ldots\ldots n}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\ldots\ldots\right],$$

nous aurons

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \ldots\ldots + \frac{1}{1.2\ldots\ldots n}$$
$$+ \frac{1}{1.2\ldots\ldots n}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots\ldots\right].$$

Multiplions ensuite tous les termes de l'égalité par le produit $1.2.3\ldots\ldots n$, le premier membre devient un nombre entier $1.2.3\ldots\ldots (n-1)m$; les $n+1$ premiers termes du second membre deviennent aussi des nombres entiers, dont, pour abréger, nous désignerons la somme par N; on obtient de la sorte l'égalité

$$1.2\ldots\ldots(n-1)m = \mathrm{N} + \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots\ldots\right].$$

La quantité entre parenthèse est une fraction moindre que l'unité ; car ses termes sont respectivement moindres que ceux de la progression

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \ldots\ldots$$

que l'on obtient en remplaçant chacun des facteurs $n+2$, $n+3,\ldots$ par le facteur plus petit $n+1$, ce qui augmente chacune des fractions ; la somme des termes de cette progression étant égale à $\frac{1}{n}$, la quantité entre parenthèse est moindre que $\frac{1}{n}$; c'est donc une fraction proprement dite. On aurait donc, dans l'égalité précédente, un nombre entier égal à un nombre fractionnaire, ce qui est impossible. Ainsi, la limite vers laquelle tend la somme des termes de la série proposée est un nombre incommensurable compris entre 2 et 3. Ce nombre joue un grand rôle en mathématiques ; on le désigne par la lettre *e*.

72. Appelons R le reste de la série, ou l'erreur commise quand on prend les $n+1$ premiers termes,

$$R = \frac{1}{1.2.\ldots.n}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots\cdots\right];$$

la parenthèse étant moindre que $\frac{1}{n}$, d'après ce qui vient d'être dit, on a

$$R < \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1.2.3.\ldots.n}.$$

Ainsi, quand on prend $n+1$ termes, l'erreur commise est moindre que la n^e partie du dernier terme calculé.

Voici le calcul de e avec sept chiffres décimaux.

$$\begin{aligned}
& \phantom{= {}} 2 \\
\frac{1}{1.2} &= 0{,}5 \\
\frac{1}{1.2.3} &= 0{,}1666\,6667 \\
\frac{1}{1.2.3.4} &= 0{,}0416\,6667 \\
\frac{1}{1.2\ldots5} &= 0{,}0083\,3333 \\
\frac{1}{1.2\ldots.6} &= 0{,}0013\,8889 \\
\frac{1}{1.2\ldots.7} &= 0{,}0001\,9841 \\
\frac{1}{1.2\ldots.8} &= 0{,}0000\,2480 \\
\frac{1}{1.2\ldots.9} &= 0{,}0000\,0276 \\
\frac{1}{1.2\ldots.10} &= 0{,}0000\,0028 \\
\frac{1}{1.2\ldots.11} &= 0{,}0000\,0003 \\
\hline
& \phantom{= {}} 2{,}7182\,8184
\end{aligned}$$

Les termes se déduisent les uns des autres par divisions successives. Nous avons pris les douze premiers termes; les trois premiers sont exacts, et nous avons calculé les autres avec huit décimales, par défaut ou par excès, de manière que l'erreur commise sur chacun d'eux soit moindre qu'une demi-unité du huitième ordre décimal; six ont été calculées par excès, trois par défaut. D'ailleurs la somme des termes négligés est moindre que la 11ᵉ partie du dernier terme calculé, et par conséquent moindre aussi qu'une demi-unité du huitième ordre décimal. Pour corriger la somme obtenue, il faudrait donc diminuer d'une quantité plus petite que 3 unités du huitième ordre décimal, et l'augmenter d'une quantité plus petite que deux unités du même ordre, ce qui donne

$$e > 2,71828181$$
$$e < 2,71828186;$$

On a ainsi, par défaut, avec sept décimales exactes,

$$e = 2,7182818.$$

Limite de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, *quand* m *augmente indéfiniment.*

73. Nous démontrerons d'abord deux lemmes qui nous serviront dans la question proposée.

LEMME I. *La limite de la somme d'un nombre fini de grandeurs variables est égale à la somme de leurs limites.* Soient A, B, C,..... L, m grandeurs variables qui tendent simultanément vers les limites a, b, c,..... l. Si l'on appelle α, β, γ,..... λ les différences des grandeurs proposées à leurs limites, on a

$$A = a + \alpha,$$
$$B = b + \beta,$$

$$C = c + \gamma,$$
$$\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots$$
$$L = l + \lambda.$$

En additionnant ces égalités et désignant par S la somme des grandeurs variables et par s celle des limites, il vient

$$S = s + (\alpha + \beta + \gamma + \ldots\ldots + \lambda).$$

Appelons p la plus grande des différences α, β,....., λ en valeur absolue; leur somme sera moindre que mp. Or le nombre m restant fini, et la quantité p devenant plus petite que toute quantité donnée, puisque toutes les différences tendent vers zéro, le produit mp deviendra aussi plus petit que toute quantité donnée; donc la somme S tend vers la limite s.

74. Lemme II. *La limite du produit d'un nombre fini de facteurs variables est égale au produit de leurs limites.*

En conservant les mêmes notations que précédemment, nous avons les différences

$$A - a = \alpha,$$
$$B - b = \beta,$$
$$C - c = \gamma,$$
$$\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots$$
$$L - l = \lambda.$$

Multiplions les deux nombres de la première égalité par BC..... L, ceux de la seconde par aC..... L, la troisième par abD.....L,....., enfin de la dernière par abc.....k, ce qui donne

$$ABC\ldots\ldots L - aBC\ldots\ldots L = \alpha BC\ldots\ldots L,$$
$$aBC\ldots\ldots L - abC\ldots\ldots L = \beta aC\ldots\ldots L,$$

$$abCD.....L - abcD.....L = \gamma abD.....L,$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$abc.....kL - abc.....kl = \lambda ab.....k.$$

Si l'on ajoute toutes ces égalités, on voit que les quantités intermédiaires se détruisent; il vient

$$ABC.....L - abc.....l = \alpha BC.....L + \beta aC.....L + ...$$

Chacun des produits $BC.....L$, $aC.....L$,....., conservant une valeur finie, le second membre est la somme de m quantités qui tendent vers zéro; donc leur somme tend vers zéro, et le produit $ABC.....L$ a pour limite $abc.....l$.

Mais il est nécessaire, pour que ces propriétés subsistent, que le nombre des parties de la somme, ou le nombre des facteurs du produit, soit fini. Soit par exemple, la somme des m quantités

$$\frac{a}{m} + \frac{a}{m} + \ldots\ldots + \frac{a}{m};$$

chacune d'elles tend vers zéro quand m augmente indéfiniment; mais le nombre des parties devenant infiniment grand, on ne peut plus dire que la limite de la somme soit la somme des limites, ce qui donnerait ici zéro; et en effet cette somme est égale à a.

De même l'expression $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ désigne le produit de m facteurs égaux à $1 + \frac{1}{m}$; chacun de ces facteurs devient égal à l'unité quand m augmente indéfiniment; la limite du produit n'est pas égale au produit des limites, c'est-à-dire à l'unité, parce que le nombre des facteurs devient infini. C'est cette limite que nous nous proposons de déterminer.

75. Si l'on développe $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ par la formule du binôme, il vient

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{m}{1}\frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{1.2}\frac{1}{m^2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\frac{1}{m^3} + \\ \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}\frac{1}{m^n} + \ldots$$

Dans chaque terme l'exposant m est égal au nombre des facteurs du numérateur; on divisera donc par cette puissance de m, en divisant par m chaque facteur du numérateur; on a ainsi

$$(1)\quad \left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{1}{1} + \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)}{1.2} + \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(-\frac{2}{m}\right)}{1.2.3} + \ldots \\ \ldots + \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)}{1.2.3\ldots n} + \ldots$$

Nous remarquons d'abord que, quand m augmente, les facteurs $1-\frac{1}{m}$, $1-\frac{2}{m}$,....., qui composent les numérateurs des différents termes du développement, vont en croissant; chaque terme augmente, ainsi que le nombre des termes; d'ailleurs tous les termes sont positifs; on en conclut que la valeur de l'expression $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ augmente à mesure que m augmente. d'un autre côté, si l'on compare ce développement à la série connue (n° 71),

$$(2)\quad e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots n} + \ldots$$

on voit que les termes du développement sont moindres

que les termes correspondants de la série, puisque les dénominateurs sont les mêmes de part et d'autre, et que les numérateurs des premiers sont inférieurs à l'unité; la valeur de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ est donc plus petite que la limite de la somme des termes de la série, c'est-à-dire plus petite que le nombre e. Ainsi, quand m augmente indéfiniment, la valeur de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ va sans cesse en croissant, tout en restant inférieure à e; elle tend donc vers une limite finie et déterminée qui ne peut surpasser le nombre e. Nous allons démontrer que cette limite est le nombre e lui-même.

Dans les deux expressions (1) et (2) prenons les $n+1$ premiers termes et considérons les deux sommes

$$A = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1-\frac{1}{m}}{1.2} + \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1.2.3} + \dots$$

$$\dots + \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)}{1.2.3\dots n},$$

$$E = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \dots + \frac{1}{1.2.3\dots n}.$$

Nous pouvons rendre n assez grand pour que la somme E diffère de sa limite e d'une quantité moindre qu'une quantité donnée $\frac{\alpha}{2}$. Ayant choisi le nombre n de cette manière, laissons-le fixe, et donnons à m des valeurs plus grandes que n et de plus en plus grandes. La somme A augmente; comme elle contient un nombre fini de termes, savoir $n+1$, la limite de cette somme, en vertu du lemme I, est égale à la somme des limites de ses différents termes. Le numéra-

teur du troisième terme a évidemment pour limite l'unité; de même celui du quatrième. En général, le numérateur d'un terme quelconque étant le produit d'un nombre fini de facteurs dont chacun se réduit à l'unité, a pour limite, en vertu du lemme II, le produit des limites de ces différents facteurs, c'est-à-dire l'unité. Ainsi, quand m augmente indéfiniment, la somme A tend vers une limite égale à la somme E. On conçoit donc que l'on puisse prendre m assez grand pour que la somme A diffère de sa limite E d'une quantité moindre que $\frac{\alpha}{2}$. On a alors

$$e - E < \frac{\alpha}{2},$$

$$E - A < \frac{\alpha}{2},$$

et par suite, en ajoutant,

$$e - A < \alpha.$$

La quantité $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ étant plus petite que e, mais plus grande que A, on a, à plus forte raison,

$$e - \left(1 - \frac{1}{m}\right)^m < \alpha.$$

Puisque l'on peut rendre m assez grand pour que la valeur de $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ diffère du nombre e d'une quantité moindre qu'une quantité donnée α, si petite qu'elle soit, il est clair que ce nombre e est la limite vers laquelle tend la valeur de $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ quand m augmente indéfiniment.

76. L'expression $(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ tend vers la même limite,

quand α tend vers zéro. Ceci est évident, si la quantité très-grande $\frac{1}{\alpha}$ est un nombre entier m; car, dans ce cas, l'expression $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ devient $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$.

En général la quantité très-grande $\frac{1}{\alpha}$ sera comprise entre deux nombres entiers consécutifs m et $m+1$, de manière que l'on ait

$$m < \frac{1}{\alpha} < m+1.$$

La quantité très-petite α sera alors comprise entre les deux fractions $\frac{1}{m}$ et $\frac{1}{m+1}$, et l'on aura

$$\frac{1}{m+1} < \alpha < \frac{1}{m}.$$

Si dans l'expression proposée $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ on remplace la quantité $1+\alpha$ par la quantité plus grande $1+\frac{1}{m}$ et l'exposant $\frac{1}{\alpha}$ par l'exposant plus grand $m+1$, on augmente la valeur de l'expression, et l'on a

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} < \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}.$$

Au contraire, si l'on remplace la quantité $1+\alpha$ par la quantité plus petite $1+\frac{1}{m+1}$ et l'exposant $\frac{1}{\alpha}$ par l'exposant plus petit m, on diminue la valeur de l'expression, et

l'on a

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} > \left(1+\frac{1}{m+1}\right)^m.$$

On obtient ainsi les inégalités

$$\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^m < (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} < \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1},$$

ou, par des transformations convenables,

$$\frac{\left(1+\dfrac{1}{m+1}\right)^{m+1}}{1+\dfrac{1}{m+1}} < (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} < \left(1+\frac{1}{m}\right)^m \times \left(1+\frac{1}{m}\right).$$

Lorsque la quantité α tend vers zéro, le nombre entier m augmente indéfiniment; chacune des quantités $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, $\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1}$ tend vers la limite e; d'ailleurs le diviseur $1+\frac{1}{m+1}$, de même que le multiplicateur $1+\frac{1}{m}$, devient égal à l'unité. Les deux quantités extrêmes tendent ainsi vers la même limite e; donc la quantité $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$, qui est comprise entre elles, tend aussi nécessairement vers cette même limite.

Nous avons supposé, dans ce qui précède, la quantité α positive; supposons-la maintenant négative; en mettant le signe en évidence, on a à considérer l'expression $(1-\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}}$. La quantité $1-\alpha$ moindre que l'unité peut se mettre sous la forme $\frac{1}{1+\alpha'}$, α' étant une quantité positive. De l'égalité

$$1-\alpha = \frac{1}{1+\alpha'}$$

on déduit

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1+\alpha'}{\alpha'} = 1 + \frac{1}{\alpha'},$$

et, en substituant,

$$(1-\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}} = \left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = (1+\alpha')^{1+\frac{1}{\alpha'}} = (1+\alpha')^{\frac{1}{\alpha'}} \times (1+\alpha').$$

Quand α' tend vers zéro, la quantité $(1+\alpha')^{\frac{1}{\alpha'}}$ tend vers e, tandis que le multiplicateur $1+\alpha'$ tend vers l'unité; donc la quantité $(1-\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}}$ a pour limite e.

Ainsi, quel que soit le signe de α, l'expression $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ tend vers une limite égale à e, quand α tend vers zéro.

Exercices.

1° Étant données les séries

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots\dots$$
$$1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \dots\dots$$
$$1 + 4x + 10x^2 + 20x^3 + \dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

qui ont pour coefficients les nombres figurés, soit du premier ordre, soit du second ordre, etc., trouver les valeurs de x pour lesquelles les séries sont convergentes et évaluer la limite de la somme des termes de chacune d'elles.

2° Développer $\left(1-\frac{1}{m}\right)^m$, et trouver la limite du développement, quand le nombre entier m augmente indéfiniment.

3° Trouver la somme des produits deux à deux des n premiers termes d'une progression géométrique. Quelle est la

limite de cette somme, quand la progression est décroissante et que n augmente indéfiniment?

4° Étant donnée la série

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots\ldots$$

dont chaque terme est égal à la somme des deux précédents, trouver la différence qui existe entre le carré d'un terme et le produit des deux termes qui le comprennent.

LIVRE IV.

DES LOGARITHMES.

CHAPITRE I.

ÉTUDE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE.

77. Lemme I. *Les puissances successives d'un nombre plus grand que l'unité vont en croissant et deviennent plus grandes que toute quantité donnée.*

Soit a une quantité positive supérieure à l'unité. On voit d'abord que ces puissances successives vont en croissant; car on obtient a^{m+1} en multipliant a^m par a; le multiplicateur a étant plus grand que l'unité, le produit a^{m+1} est plus grand que le multiplicande a^m. Je dis maintenant que les puissances de a augmentent au delà de toute limite. Posons $a = 1 + \alpha$: en développant $(1+\alpha)^m$ suivant la loi du binôme, nous aurons

$$a^m = (1+\alpha)^m = 1 + \frac{m}{1}\alpha + \frac{m(m-1)}{1.2}\alpha^2 + \ldots\ldots$$

Tous les termes du développement sont positifs; si donc

on néglige le troisième terme et les termes suivants, on diminue le second membre, et l'on a

$$a^m > 1 + m\alpha.$$

Pour rendre la quantité a^m plus grande qu'une quantité donnée A, il suffit évidemment de rendre la quantité $1 + m\alpha$ plus grande que cette quantité; on déterminera donc l'exposant m de manière à satisfaire à l'inégalité

$$1 + m\alpha > A;$$

d'où

$$m > \frac{A - 1}{\alpha}.$$

Ainsi, lorsque l'exposant m surpassera $\frac{A-1}{\alpha}$, il est certain que la puissance a^m sera supérieure à la quantité A, si grande qu'elle soit. Donc les puissances successives du nombre a plus grand que l'unité augmentent à l'infini.

Soit, par exemple, $a = 1,1$; on peut affirmer que a^m surpassera 1000 si m est plus grand que $\frac{999}{0,1}$ ou que 9990. Mais on n'a pas ainsi les plus petites puissances de a supérieures à 1000.

78. Lemme II. ***Les puissances successives d'un nombre plus petit que l'unité vont en décroissant et deviennent plus petites que toute quantité donnée.***

Le nombre a, étant inférieur à l'unité, peut être représenté par $\frac{1}{1+\alpha}$, et l'on a

$$a^m = \frac{1}{(1+\alpha)^m}.$$

Quand l'exposant m croît indéfiniment, le dénominateur

augmentant à l'infini, la fraction diminue et tend vers zéro.

79. Lemme III. *La racine d'un nombre supérieur à l'unité est supérieure à l'unité, et l'on peut prendre l'indice du radical assez grand pour que la racine diffère de l'unité d'une quantité moindre que toute quantité donnée.*

Soit a un nombre supérieur à l'unité. Je dis d'abord que $\sqrt[n]{a}$ surpasse l'unité; car un nombre plus petit que l'unité, élevé à la n^e puissance, ne pourrait reproduire le nombre a plus grand que l'unité. Nous voulons rendre $\sqrt[n]{a}$ inférieure à $1+\alpha$, α étant une quantité donnée très-petite; il s'agit donc de satisfaire à l'inégalité

$$\sqrt[n]{a} < 1+\alpha,$$

ou à la suivante

$$(1+\alpha)^n > a.$$

Or, en vertu du lemme I, si petite que soit α, on peut toujours prendre l'exposant n assez grand pour que $(1+\alpha)^n$ surpasse a.

On veut, par exemple, que $\sqrt[n]{2}$ diffère de l'unité de moins de 0,001. On prendra n plus grand que $\frac{2-1}{0,001}$, c'est-à-dire plus grand que 1000.

Corollaire. *Toute puissance fractionnaire d'un nombre plus grand que l'unité est plus grande que l'unité.* Car $a^{\frac{m}{n}}$ signifie $\sqrt[n]{a^m}$; le nombre a étant supérieur à l'unité, sa puissance a^m est supérieure à l'unité, et la racine de cette dernière quantité est aussi supérieure à l'unité.

80. Lemme IV. *La racine d'un nombre inférieur à l'unité est inférieure à l'unité, et l'on peut prendre l'indice du ra-*

dical assez grand pour que la racine diffère de l'unité d'une quantité moindre que toute quantité donnée.

Si le nombre a est inférieur à l'unité, $\sqrt[n]{a}$ sera aussi inférieure à l'unité; car un nombre supérieur à l'unité, élevé à la n^e puissance, ne pourrait reproduire le nombre a inférieur à l'unité; d'autre part, le nombre a, inférieur à l'unité, peut s'écrire sous la forme $\frac{1}{a'}$, a' étant supérieur à l'unité, et l'on a

$$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{a'}}.$$

Le dénominateur tendant vers l'unité, quand l'indice n du radical augmente indéfiniment, la fraction tend elle-même vers l'unité.

COROLLAIRE. *Toute puissance fractionnaire d'un nombre plus petit que l'unité est plus petite que l'unité.*

81. THÉORÈME. *La fonction* a^x *varie d'une manière continue, quand* x *croît d'une manière continue.*

On appelle *fonction* en mathématiques une expression qui contient une lettre désignant une quantité variable. L'expression $2x^2 - 4x + 5$ est une fonction entière de la variable x. L'expression a^x est une fonction *exponentielle* de x; on la nomme ainsi parce que la variable x est en exposant.

Nous supposons le nombre a positif et plus grand que l'unité. Je dis d'abord que lorsque la variable x croît, la fonction a^x croît. En effet, si l'on donne à la variable x un accroissement positif h, la fonction devient a^{x+h}, et éprouve une variation marquée par

$$a^{x+h} + a^x = a^x(a^h - 1).$$

Mais a^h est supérieur à l'unité, parce que toute puissance positive d'un nombre a supérieur à l'unité est elle-même supérieure à l'unité; donc la différence $a^{x+h}-a^x$ est positive, et par suite a^{x+h} est plus grande que a^x. Ainsi, quand a est plus grand que l'unité, la fonction a^x croît en même temps que la variable x.

Je dis maintenant que l'on peut donner à la variable x un accroissement h assez petit pour que la fonction a^x éprouve un accroissement plus petit qu'une quantité donnée α. En effet, supposons h plus petit qu'une fraction de la forme $\frac{1}{n}$, n étant un entier très-grand; en vertu du lemme III, on peut prendre n assez grand pour que $a^{\frac{1}{n}}$ ou $\sqrt[n]{a}$ diffère de l'unité d'une quantité plus petite que $\frac{\alpha}{a^x}$; la quantité a^h étant moindre que $a^{\frac{1}{n}}$, puisque h est inférieure à $\frac{1}{n}$, différera de l'unité d'une quantité encore plus petite, et la différence $a^{x+h}-a^x$ sera moindre que $a^x \times \frac{\alpha}{a^x}$ ou que α. Ainsi l'accroissement de la fonction peut être rendu plus petit qu'une quantité donnée, si petite qu'elle soit; en d'autres termes, lorsque l'accroissement de la variable tend vers zéro, celui de la fonction tend aussi vers zéro.

On dit qu'une grandeur varie d'une manière continue lorsqu'elle ne peut aller d'une valeur à une autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires. Une fonction est *continue* lorsqu'à une variation infiniment petite de la variable correspond une variation infiniment petite de la fonction; car si la fonction sautait brusquement d'une valeur à une autre, elle éprouverait une variation finie pour une variation infiniment petite de la variable.

Il résulte de ce qui précède que, lorsque la variable x croît d'une manière continue, la fonction exponentielle a^x croît aussi d'une manière continue.

Nous avons supposé le nombre positif a plus grand que l'unité. Supposons-le maintenant plus petit, et posons $a = \frac{1}{a'}$, a' étant supérieur à l'unité. On a

$$a^x = \frac{1}{a'^x}.$$

Lorsque x croît d'une manière continue, a'^x croît, et par conséquent a^x décroît d'une manière continue.

82. Corollaire. Voyons maintenant les valeurs par lesquelles passe la fonction exponentielle a^x, quand on fait croître x d'une manière continue de $-\infty$ à $+\infty$. Supposons d'abord a supérieur à l'unité, et faisons croître x de o à $+\infty$; pour $x = 0$, on a $a^0 = 1$; quand x est infiniment grand, en vertu du lemme I, a^x est aussi infiniment grand; ainsi, quand x croît de o à $+\infty$, la fonction a^x croît de 1 à $+\infty$. Faisons maintenant décroître x de o à $-\infty$, et pour cela posons $x = -x'$, x' étant positive; on a

$$a^x = \frac{1}{a^{x'}};$$

quand x' croît de o à $+\infty$, $a^{x'}$ croît de 1 à $+\infty$, et par conséquent a^x décroît de 1 à o. En résumé, lorsque la valeur x croît d'une manière continue de $-\infty$ à $+\infty$, a étant supérieure à l'unité, la fonction a^x croît d'une manière continue de o à $+\infty$. Il est à remarquer que la fonction passe par toutes les valeurs positives et qu'elle ne passe qu'une fois par chacune d'elles, puisqu'elle va constamment en augmentant.

Considérons maintenant le cas où le nombre a est infé-

rieur à l'unité, et posons $a = \frac{1}{a'}$, a' étant supérieur à l'unité, ce qui donne

$$a^x = \frac{1}{a'^x}.$$

On voit que, lorsque x croît de o à $+\infty$, a'^x croissant de 1 à $+\infty$, a^x décroît de 1 à o, et que, lorsque x décroît de o à $-\infty$, a'^x décroissant de 1 à o, a^x croît de 1 à $+\infty$. Ainsi, quand x croît d'une manière continue de $-\infty$ à $+\infty$, a étant inférieure à l'unité, la fonction a^x décroît d'une manière continue de $+\infty$ à o. La fonction passe encore par toutes les valeurs positives et une seule fois par chacune d'elles.

83. Remarque. Nous pouvons maintenant donner d'une manière très-nette la signification de l'exposant incommensurable dont nous avons déjà dit quelques mots (n° 20). Soit $a^{\sqrt{2}}$, et, pour préciser, supposons a supérieur à l'unité; le nombre incommensurable $\sqrt{2}$ est la limite commune de deux nombres fractionnaires $\frac{m}{n}$ et $\frac{m+1}{n}$, qui diffèrent entre eux d'une quantité aussi petite qu'on veut, et dont les carrés comprennent 2; en remplaçant $\sqrt{2}$ par ces nombres approchés, on obtiendra deux séries de puissances fractionnaires $a^{\frac{m}{n}}$ et $a^{\frac{m+1}{n}}$, les premières plus petites que les secondes, et telles que leur différence peut être rendue plus petite qu'une quantité donnée; il existe donc entre ces deux séries de grandeurs une grandeur déterminée qui en est la limite commune; c'est cette limite que désigne $a^{\sqrt{2}}$.

CHAPITRE II.

DES LOGARITHMES.

Définition par la fonction exponentielle.

84. On appelle *logarithme* d'un nombre l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever un nombre positif constant a pour reproduire le nombre proposé.

Nous avons vu que, lorsque x croît d'une manière continue de $-\infty$ à $+\infty$, la fonction a^x passe par toutes les valeurs positives et ne passe qu'une fois par chacune d'elles; il en résulte que tous les nombres positifs ont des logarithmes, et que chacun d'eux n'a qu'un logarithme. Si le nombre constant a est supérieur à l'unité, les nombres plus grands que l'unité ont des logarithmes positifs, les nombres plus petits que l'unité des logarithmes négatifs. Si a était inférieur à l'unité, les nombres plus grands que l'unité auraient au contraire des logarithmes négatifs, les nombres plus petits que l'unité des logarithmes positifs. Les nombres négatifs n'ont pas de logarithmes réels.

Nous désignerons le logarithme d'un nombre par la notation *log*. Soit donc $y = a^x$, nous dirons que l'exposant x est le logarithme du nombre y, et nous écrirons $x = \log y$. Puisque y varie d'une manière continue avec x, réciproquement x varie d'une manière continue avec y; ainsi le logarithme est une fonction continue du nombre. Quand la base a est plus grande que l'unité, si le nombre y croît de 0 à 1, puis de 1 à $+\infty$, le logarithme x croît de $-\infty$ à 0, puis de 0 à $+\infty$.

Propriétés des logarithmes.

Les logarithmes jouissent de propriétés très-remarquables que nous allons démontrer.

85. Théorème I. *Le logarithme du produit de plusieurs facteurs égale la somme des logarithmes de ces facteurs.*

Soient deux nombres y et y', dont nous appellerons x et x' les logarithmes; d'après la définition même des logarithmes, on a

$$a^x = y,$$
$$a^{x'} = y'.$$

Multiplions ces deux égalités membre à membre, il vient

$$a^{x+x'} = yy'.$$

L'exposant $x + x'$ est le logarithme du produit yy'; on a donc

$$\log(yy') = \log y + \log y'.$$

La même démonstration s'applique à un nombre quelconque de facteurs. Soient trois nombres y, y', y'', ayant pour logarithmes x, x', x''; on a de même

$$a^x = y,$$
$$a^{x'} = y',$$
$$a^{x''} = y'',$$

et, en multipliant,

$$a^{x+x'+x''} = yy'y'';$$

donc

$$\log(yy'y'') = \log y + \log y' + \log y''.$$

86. Théorème II. *Le logarithme d'un quotient égale le*

logarithme du dividende moins le logarithme du diviseur.

En divisant membre à membre les deux égalités

$$a^x = y,$$
$$a^{x'} = y',$$

on a

$$a^{x-x'} = \frac{y}{y'}.$$

L'exposant $x - x'$ est le logarithme du quotient $\frac{y}{y'}$. Donc

$$\log\frac{y}{y'} = \log y - \log y'.$$

87. Théorème III. *Le logarithme de la puissance d'un nombre égale le logarithme de ce nombre multiplié par l'indice de la puissance.*

Si l'on élève à la m^e puissance (m étant un nombre quelconque, entier ou fractionnaire, positif ou négatif), les deux membres de l'égalité

$$a^x = y,$$

il vient

$$a^{mx} = y^m.$$

Donc

$$\log(y^m) = m \log y.$$

88. Théorème IV. *Le logarithme de la racine d'un nombre égale le logarithme de ce nombre, divisé par l'indice de la racine.*

Ce théorème n'est qu'un cas particulier du théorème précédent; car $\sqrt[n]{y}$ s'écrit $y^{\frac{1}{n}}$, et l'on a

$$\log\sqrt[n]{y} = \frac{\log y}{n}.$$

L'emploi des logarithmes simplifie beaucoup les calculs numériques; car la multiplication est remplacée par une addition, la division par une soustraction, l'élévation à une puissance par une multiplication, l'extraction d'une racine par une division.

Définition des logarithmes par des progressions.

89. Si l'on prend les logarithmes des termes d'une progression géométrique

$$a : ar : ar^2 : ar^3 : \ldots\ldots,$$

dont la raison est r, on forme évidemment une progression arithmétique

$$\log a . \log a + \log r . \log a + 2\log r . \log a + 3\log r \ldots\ldots$$

ayant pour raison $\log r$.

En arithmétique, on a coutume de définir les logarithmes par deux progressions, l'une géométrique commençant par l'unité, l'autre arithmétique commençant par zéro

$$1 : a : a^2 : a^3 : \ldots\ldots$$
$$0 . b . 2b . 3b \ldots\ldots$$

et l'on appelle logarithme d'un terme quelconque de la progression géométrique le terme correspondant de la progression arithmétique. Afin d'avoir les logarithmes de tous les nombres avec une grande approximation, on insère un grand nombre de moyens entre deux termes consécutifs de la progression géométrique, et le même nombre de moyens entre deux termes consécutifs de la progression arithmétique.

Il est aisé de voir que cette définition des logarithmes

par les progressions revient à la définition que nous avons donnée par les exponentielles. Considérons les deux progressions

$$1 : a : a^2 : a^3 : \ldots\ldots$$
$$0 . 1 . 2 . 3 \ldots\ldots$$

Si l'on insère $n-1$ moyens entre deux termes consécutifs des deux progressions, la raison de la progression géométrique devient $\sqrt[n]{a}$ ou $a^{\frac{1}{n}}$, celle de la progression arithmétique $\frac{1}{n}$, en sorte que les deux progressions ainsi développées s'écrivent

$$1 : a^{\frac{1}{n}} : a^{\frac{2}{n}} : a^{\frac{3}{n}} : \ldots\ldots . a^{\frac{m}{n}} : \ldots\ldots$$
$$0 . \frac{1}{n} . \frac{2}{n} . \frac{3}{n} \ldots\ldots \frac{m}{n} \ldots\ldots$$

Sous cette forme, on voit qu'un nombre quelconque $a^{\frac{m}{n}}$ de la progression géométrique a pour logarithme l'exposant $\frac{m}{n}$ de la puissance à laquelle il faut élever le nombre constant a pour avoir le nombre proposé. La base a d'un système de logarithmes est le nombre qui a pour logarithme l'unité.

Changement de la base.

90. La base d'un système de logarithmes est un nombre positif constant, que l'on peut choisir à volonté. Supposons que l'on ait calculé les logarithmes des nombres dans le système dont la base est a, et que l'on veuille les calculer dans un autre système ayant pour base a'. Appelons x le logarithme d'un nombre quelconque y dans le premier sys-

tème, x' le logarithme du même nombre dans le second système, on aura

$$a^x = y, \quad a'^{x'} = y;$$

d'où

$$a^x = a'^{x'}.$$

Prenons les logarithmes des deux membres de cette égalité dans le premier système, en remarquant que le logarithme de a est l'unité, il vient

$$x = x' \log a',$$

d'où

$$x' = \frac{1}{\log a'} x.$$

Ainsi les logarithmes des mêmes nombres dans les deux systèmes sont proportionnels, et l'on a la règle suivante : *pour passer d'un système de logarithme à un autre, il suffit de multiplier les logarithmes du premier système par l'inverse du logarithme de la nouvelle base pris dans le premier système.*

Logarithmes népériens.

91. Les logarithmes ont été inventés au commencement du XVIIe siècle par l'Écossais *Néper*, qui prit pour base le nombre incommensurable $e = 2,7182818.....$; les logarithmes de ce système ont été appelés logarithmes *hyperboliques*, ou, du nom de l'inventeur, logarithmes *népériens*. Ce sont ceux-là qui se présentent naturellement dans l'analyse mathématique; on les distingue ordinairement par la lettre L.

Mais les logarithmes népériens ne sont pas commodes

pour les calculs numériques, parce qu'ils ne sont pas en harmonie avec notre numération décimale. C'est pourquoi *Briggs*, contemporain de Néper, proposa de remplacer la base e par la base *dix* de notre système de numération. Ce sont les logarithmes de Briggs dont on fait habituellement usage dans les calculs numériques; on les a nommés pour cette raison *logarithmes vulgaires;* nous les désignerons par le signe *log.*

On appelle *module* d'un système de logarithmes le nombre constant par lequel il faut multiplier les logarithmes népériens pour avoir les logarithmes du système considéré. Soit a la base d'un système de logarithmes; d'après ce qui a été dit précédemment, son module M sera

$$M = \frac{1}{La},$$

c'est-à-dire l'inverse du logarithme népérien de la base. Le module des logarithmes vulgaires est $M = 0,4342944819...$

Lorsqu'on passe d'un système dont la base est a à un système dont la base est a', le multiplicateur constant $\frac{1}{\log a'}$ s'appelle *module relatif* du premier système au second.

92. Il est bon de faire voir pourquoi Néper a choisi le nombre incommensurable e pour base de son système de logarithmes. Considérons les deux progressions

$$\begin{array}{l} 1 : (1+\alpha) : (1+\alpha)^2 : (1+\alpha)^3 : \ldots\ldots \\ 0.\quad \beta \quad . \quad 2\beta \quad . \quad 3\beta \quad \ldots\ldots \end{array}$$

dans lesquelles α et β sont des quantités très-petites, afin que les termes des deux progressions croissent par degrés très-petits, et que l'on ait ainsi les logarithmes de tous les

nombres avec une grande approximation. Néper appelait module des logarithmes définis par ces deux progressions le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$, ou plutôt la limite de ce rapport, quand α et β tendent simultanément vers zéro, et il distinguait chaque système de logarithmes par son module. L'idée lui vint alors d'adopter le système dont le module est l'unité, celui qu'il regardait comme le plus simple. Si l'on fait $\beta = \alpha$, les deux progressions deviennent

$$1 : 1 + \alpha : (1 + \alpha)^2 : (1 + \alpha)^3 : \ldots\ldots$$
$$1 \;.\; \alpha \;.\; 2\alpha \;.\; 3\alpha \;\ldots\ldots$$

Telles sont les deux progressions par lesquelles Néper définissait son système de logarithmes. Calculons la base de ce système, c'est-à-dire le nombre qui a pour logarithme l'unité; supposons d'abord que le terme $m\alpha$ de la progression arithmétique soit égal à l'unité; le terme correspondant de la progression géométrique est $(1 + \alpha)^m$; puisque $m\alpha = 1$, on a $\alpha = \frac{1}{m}$ et $(1 + \alpha)^m = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$; lorsque α tend vers zéro, m augmente indéfiniment, et le nombre $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ tend vers la limite e, qui est la base des logarithmes népériens.

Si aucun terme de la progression arithmétique n'est égal à l'unité, deux termes consécutifs $m\alpha$ et $(m + 1)\alpha$ comprendront l'unité; la base a sera comprise entre les deux termes correspondants $(1 + \alpha)^m$ et $(1 + \alpha)^{m+1}$ de la progression géométrique. On a

$$m\alpha < 1 < (m + 1)\alpha,$$

et par suite

$$\frac{1}{m + 1} < \alpha < \frac{1}{m}.$$

La base est plus grande que $(1+\alpha)^m$, et à plus forte raison plus grande que $\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^m$; elle est plus petite que $(1+\alpha)^{m+1}$ et à plus forte raison plus petite que $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}$. La base est donc comprise entre les deux quantités

$$\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^m, \quad \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1},$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$\frac{\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1}}{1+\frac{1}{m+1}}, \quad \left(1+\frac{1}{m}\right)^m \times \left(1+\frac{1}{m}\right).$$

Chacune de ces quantités ayant pour limite e, quand m augmente indéfiniment, la base cherchée est égale à e.

Logarithmes vulgaires.

93. Dans un système quelconque, les puissances de la base a^1, a^2, a^3..... ont évidemment pour logarithmes les nombres entiers 1, 2, 3..... Dans le système vulgaire, ce sont les puissances de 10, savoir 10, 100, 1000,..... qui ont pour logarithmes les nombres entiers successifs. Les logarithmes ont été calculés en décimales; la partie entière d'un logarithme s'appelle *caractéristique*.

Les nombres plus petits que l'unité ont leurs logarithmes négatifs; les logarithmes négatifs étant incommodes dans la pratique, on leur substitue des logarithmes qui ont leur partie décimale positive et leur caractéristique seulement négative. Soit le nombre 0,03564 plus petit que l'unité; son

logarithme est négatif et a pour valeur

$$-1,4480623.$$

Écrivons ce logarithme de la manière suivante

$$-2+1-0,4480623=-2+0,5519377,$$

ou plus simplement

$$\bar{2},5519377.$$

Sous cette forme, le logarithme a sa partie décimale positive; le signe —, placé au-dessus de la partie entière, indique que la caractéristique seule est négative. *La caractéristique négative du logarithme d'un nombre décimal plus petit que l'unité renferme un nombre d'unités marqué par le rang du premier chiffre significatif, à partir de la virgule.* En effet, soit m le rang du premier chiffre significatif à partir de la virgule dans le nombre proposé y; le produit $y \times 10^m$ étant compris entre 1 et 10, son logarithme a zéro pour caractéristique, avec une partie décimale positive; pour revenir au nombre y, il faut diviser par 10^m, c'est-à-dire retrancher m du logarithme; le logarithme de y aura donc une caractéristique négative $\overline{m}$, suivie d'une partie décimale positive.

Dans la première partie de cet ouvrage (livre IV, ch. 3), nous avons expliqué l'usage des tables de Callet. Nous nous sommes occupés aussi des questions relatives aux intérêts composés et aux annuités. Nous y renvoyons le lecteur.

Résolution des équations exponentielles.

94. On appelle équation *exponentielle* une équation de la forme

$$a^x = b,$$

dans laquelle a et b sont deux quantités positives données, l'exposant x l'inconnue qui doit vérifier l'égalité. Il est facile de résoudre une semblable équation au moyen des logarithmes. Si l'on prend les logarithmes des deux membres de l'équation, on a

$$x \log a = \log b;$$

d'où

$$x = \frac{\log b}{\log a}.$$

On obtient ainsi la valeur de l'inconnue.

Exemples.

1°
$$7^x = 1254,$$
$$x = \frac{\log 1254}{\log 7} = \frac{3,0982975}{0,8450980 4} = 3,666197.$$

2°
$$3^x = 0,462$$
$$x = \frac{\log 0.462}{\log 3} = -0,702878.$$

On peut encore résoudre des équations exponentielles plus compliquées que la précédente. Soit l'équation

$$a^{b^x} = c,$$

dans laquelle le premier membre signifie que le nombre a est élevé à une puissance marquée par b^x, les trois lettres a, b, c désignant d'ailleurs des nombres donnés positifs. En prenant les logarithmes des deux nombres, on a

$$b^x \times \log a = \log c,$$

d'où

$$b^x = \frac{\log c}{\log a}.$$

On est ramené ainsi à l'exponentielle ordinaire. Pour que la question soit possible, il faut que les nombres a et c soient tous deux supérieurs ou tous deux inférieurs à l'unité, afin que le second membre ait une valeur positive. Si l'on prend une seconde fois les logarithmes, on a

$$x \log b = \log\log c - \log\log a;$$

d'où

$$x = \frac{\log\log c - \log\log a}{\log b}.$$

LIVRE V.

DÉRIVÉES.

CHAPITRE PREMIER.

DÉRIVÉES.

95. Lorsque deux quantités variables x et y sont liées l'une à l'autre, de telle sorte que la variation de l'une entraîne la variation de l'autre, on dit que ces deux quantités sont fonctions l'une de l'autre. Si l'on regarde y comme une fonction de x, on indique cette liaison par le symbole $y = f(x)$. Nous supposerons dans ce qui suit que, lorsque la variable x varie d'une manière continue entre certaines limites, la fonction y varie aussi d'une manière continue. A une variation très-petite h de la variable correspond une variation très-petite k de la fonction ; quand la première variation tend vers zéro, la seconde tend aussi vers zéro. En général, le rapport $\frac{k}{h}$ de la variation de la fonction à la variation de la variable tend vers une limite finie et déterminée; cette limite est ce qu'on appelle la *dérivée* de la fonction proposée. La dérivée est une nouvelle

fonction de x que nous représenterons par le symbole y' ou $f'(x)$.

En mathématiques, on donne le nom d'*accroissements* aux variations très-petites des grandeurs continues, que ces variations soient positives ou négatives.

Considérons, par exemple, la fonction $y = x^2$. Si l'on donne à la variable x l'accroissement h, la fonction devient

$$(x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2;$$

elle éprouve la variation ou l'accroissement

$$k = (x+h)^2 - x^2 = 2xh + h^2;$$

on peut rendre h assez petit pour que chacun des termes $2xh$ et h^2, et par conséquent leur somme k, ait une valeur aussi petite qu'on veut ; ainsi la fonction y varie d'une manière continue avec x. En divisant par h, on a

$$\frac{k}{h} = 2x + h.$$

Quand on fait tendre h vers zéro, le rapport $\frac{k}{h}$ de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable tend vers la limite $2x$; on en conclut que la fonction proposée admet une dérivée $y' = 2x$.

96. Considérons encore la fonction plus générale $y = ax^m$, dans laquelle l'exposant m est entier et positif, et le coefficient a constant. Si l'on donne à la variable x l'accroissement h, la fonction devient

$$a(x+h)^m = ax^m + \frac{m}{1}ax^{m-1}h + \frac{m(m-1)}{1.2}ax^{m-2}h^2 + \ldots\ldots + ah^m;$$

elle éprouve l'accroissement

$$k = a(x+h)^m - ax^m = max^{m-1}h + \frac{m(m-1)}{1.2}ax^{m-2}h^2 + \ldots\ldots + ah^m;$$

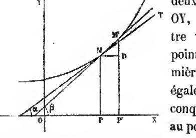
on peut rendre h assez petit pour que chacun des termes du second membre, et par conséquent leur somme k, ait une valeur aussi petite qu'on veut; ainsi la fonction y varie d'une manière continue avec x. En divisant par h, on a

$$\frac{k}{h} = max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}ax^{m-2}h + \ldots\ldots + ah^{m-1}.$$

Quand on fait tendre h vers zéro, tous les termes du second membre, à partir du second, tendent vers zéro; comme ils sont en nombre fini, leur somme tend aussi vers zéro. Le rapport $\frac{k}{h}$ tend donc vers la limite max^{m-1}; on en conclut que la fonction proposée admet une dérivée $y' = max^{m-1}$. Ainsi, *on obtient la dérivée de la fonction* ax^m *en multipliant cette fonction par l'exposant de* x, *et diminuant ensuite l'exposant d'une unité.*

97. En général, les fonctions continues admettent des dérivées; on peut rattacher cette propriété analytique des fonctions continues à la propriété géométrique des courbes d'admettre en général une tangente en chacun de leurs points.

Soit $y = f(x)$ la fonction proposée. Traçons dans un plan deux droites fixes OX et OY, l'une horizontale, l'autre verticale; à partir du point O portons sur la première une longueur OP égale à une valeur quelconque de la variable x; au point P élevons une perpendiculaire sur laquelle nous prendrons une longueur PM égale à la valeur correspondante de la fonction y, et opé-



rons de même pour chaque valeur de x; la fonction étant continue, le lieu des points M ainsi obtenus formera une courbe qui représentera la marche de la fonction. Afin d'étendre ce mode de représentation à toutes les valeurs, on convient de porter les valeurs positives de x à droite du point O, les valeurs négatives à gauche; et de même on porte la valeur de y sur la perpendiculaire, au-dessus si elle est positive, au-dessous si elle est négative.

Cela posé, donnons à x un accroissement $PP' = h$, la fonction éprouvera un accroissement k représenté par la différence M'D entre les deux perpendiculaires ou *ordonnées* voisines MP et M'P'. Traçons la sécante MM'; dans le triangle rectangle MM'D, le rapport $\frac{k}{h}$ est égal à la tangente de l'angle M'MD ou de l'angle β que fait cette sécante avec l'axe horizontal OX. Faisons maintenant diminuer l'accroissement h jusqu'à zéro, le point M' se rapprochera indéfiniment du point M; la sécante, tournant autour du point M, tendra en général vers une position limite MT qui est la tangente à la courbe au point M; l'angle β tendra vers l'angle α, que fait la tangente MT avec l'horizontale, et le rapport $\frac{k}{h}$, qui est égale à $\tang \beta$, tendra vers la limite $\tang \alpha$.

Ainsi, quand la courbe qui représente la fonction a une tangente, et c'est ce qui a lieu en général, la fonction admet une dérivée.

98. Nous avons appelé dérivée d'une fonction continue $y=f(x)$ la limite du rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable, quand ces deux accroissements tendent vers zéro. Cette dérivée $y'=f'(x)$ est une nouvelle fonction continue de x; si l'on en prend la dérivée, on

aura la dérivée de la *première dérivée*, ou la *seconde dérivée* de la fonction proposée ; nous la représenterons par le symbole y'' ou $f''(x)$. Cette seconde dérivée $y'' = f''(x)$ est une nouvelle fonction continue de x ; si l'on en prend la dérivée, on aura la dérivée de la seconde dérivée, ou la *troisième dérivée* de la fonction proposée ; nous la représenterons par y''' ou $f'''(x)$. En continuant de cette manière, on obtient les dérivées des différents ordres de la fonction proposée.

Dérivée d'une somme.

99. Soient u, v, w diverses fonctions continues de la variable x. Nous supposons que ces fonctions ont des dérivées que nous convenons de représenter par les notations u', v', w', accentuant simplement les lettres qui désignent les fonctions. Désignons par le symbole Δx l'accroissement que l'on donne à la variable x, et par Δu, Δv, Δw les accroissements ou variations qui en résultent pour les fonctions u, v, w.

La somme algébrique

$$y = u + v - w$$

des fonctions proposées est une nouvelle fonction de la variable x. En désignant par Δy la variation qu'éprouve cette fonction, on a évidemment

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v - \Delta w.$$

Chacune des fonctions u, v, w étant continue, on peut attribuer à la variable x un accroissement Δx assez petit pour que chacun des accroissements Δu, Δv, Δw, et par conséquent leur somme Δy, ait une valeur aussi petite qu'on veut ; ainsi la nouvelle fonction y varie aussi d'une manière continue avec x.

Si l'on divise tous les termes par Δx, il vient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x}.$$

Supposons maintenant que l'accroissement Δx de la variable tende vers zéro, les accroissements correspondants Δu, Δv, Δw, Δy des fonctions tendront aussi vers zéro; le rapport $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ tendra vers une limite qui, par définition, est la dérivée de la fonction u, dérivée que nous représenterons par u'; les rapports $\frac{\Delta v}{\Delta x}$, $\frac{\Delta w}{\Delta x}$ tendront de même vers des limites qui sont les dérivées des fonctions v et w; on en conclut que le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tend aussi vers une limite égale à $u' + v' - w'$; la fonction y admet donc une dérivée, et l'on a

$$y' = u' + v' - w'.$$

Ainsi, *la dérivée d'une somme algébrique est la somme des dérivées des diverses fonctions qui la composent.*

Dérivée d'une fonction entière.

100. Toute fonction entière du degré m est de la forme

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots\ldots + A_{m-1} x + A_m.$$

C'est la somme algébrique des termes qui la composent; chacun des termes étant une fonction continue de x ayant une dérivée, leur somme, d'après le théorème précédent, est aussi une fonction continue de x, admettant une dérivée, et cette dérivée est égale à la somme des dérivées des différents termes. Nous avons vu (n° 96) que, pour trouver

la dérivée de la fonction entière élémentaire ax^m, il faut multiplier par l'exposant de x et diminuer ensuite cet exposant d'une unité : en appliquant cette règle à chacun des termes du polynôme, on a

$$f'(x) = mA_0x^{m-1} + (m-1)A_1x^{m-2} + \ldots\ldots + A_{m-1}.$$

Le degré de chaque terme s'abaissant d'une unité, la dérivée est une fonction entière du degré $m-1$. Le terme constant A_m n'entre pas dans la dérivée, et, en effet, quand x varie, l'accroissement k de la constante étant nul, on a $\frac{k}{h} = 0$, et la dérivée est nulle.

En prenant la dérivée de cette première dérivée, on obtient la seconde dérivée du polynôme proposé

$$f''(x) = m(m-1)A_0x^{m-2} + (m-1)(m-2)A_1x^{m-3} + \ldots\ldots + A_{m-2};$$

c'est une fonction entière du degré $m-2$.

La troisième dérivée, ou la dérivée de la seconde dérivée,

$$f'''(x) = m(m-1)(m-2)A_0x^{m-3} + \ldots\ldots$$

est du degré $m-3$, et ainsi de suite, chaque dérivation diminuant le degré d'une unité.

La dérivée de l'ordre m est du degré zéro ; c'est une constante. Les dérivées suivantes sont nulles. Ainsi un polynôme du degré m a m dérivées.

Exemples.

$$f(x) = x^3 + 5x^2 - 7x + 6.$$

En appliquant la règle énoncée plus haut, on obtient les

dérivées successives

$$f'(x) = 3x^2 + 10x - 7,$$
$$f''(x) = 6x + 10,$$
$$f'''(x) = 6.$$

Il est à remarquer que le terme constant du polynôme proposé n'entre pas dans la dérivée; que les deux derniers termes n'entrent pas dans la seconde dérivée, etc. Le premier terme entre seul dans la dernière dérivée.

Développement d'une fonction entière f(x) *suivant les puissances croissantes de* h *quand on remplace* x *par* x + h.

101. Si dans la fonction entière

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} \ldots\ldots + A_{m-1} x + A_m,$$

on remplace la variable x par $x + h$, il vient

$$f(x+h) = A_0(x+h)^m + A_1(x+h)^{m-1} + A_2(x+h)^{m-2} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + A_{m-1}(x+h) + A_m;$$

en développant chaque terme suivant la loi du binôme. on a

$$\begin{array}{l|l|l}
f(x+h) = A_0 x^m \quad + m A_0 x^{m-1} & \dfrac{h}{1} \quad + m(m-1) A_0 x^{m-2} & \dfrac{h^2}{1.2} + \ldots + m(m-1)\ldots 2.1.A_0 \dfrac{h^m}{1.2\ldots m}. \\
\quad + A_1 x^{m-1} + (m-1) A_1 x^{m-2} & \quad + (m-1)(m-2) A_1 x^{m-3} & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
\quad + A_2 x^{m-2} + (m-2) A_2 x^{m-3} & \quad + (m-2)(m-3) A_2 x^{m-4} & \\
\quad \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\quad \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\quad + A_{m-1} x \qquad + A_{m-1} & & \\
\quad + A_m & &
\end{array}$$

Dans la première colonne verticale nous retrouvons le polynôme proposé $f(x)$. Dans la seconde colonne, qui con-

tient h en facteur, nous trouvons la première dérivée $f'(x)$; et en effet on voit, d'après la règle du binôme, que l'on obtient ce second polynôme en multipliant chacun des termes du polynôme proposé par l'exposant de x et diminuant cet exposé d'une unité. Le polynôme écrit dans la troisième colonne, et qui contient $\frac{h^2}{1.2}$ en facteur, se déduit du précédent suivant la même loi; c'est la dérivée de la première dérivée, ou la seconde dérivée $f''(x)$ du polynôme proposé. Le polynôme suivant, coefficient de $\frac{h^3}{1.2.3}$, est la troisième dérivée $f'''(x)$, et ainsi de suite. Enfin, dans le dernier terme, le coefficient de $\frac{h^m}{1.2.....m}$ est la dérivée d'ordre m. Le développement de $f(x+h)$ suivant les puissances croissantes de h s'écrira donc

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)\frac{h}{1} + f''(x)\frac{h^2}{1.2} + f'''(x)\frac{h^3}{1.2.3} + \dots$$
$$\dots + f^{(m)}(x)\frac{h^m}{1.2.....m}.$$

Dérivée d'un produit.

102. Considérons d'abord le produit $y = uv$ de deux fonctions continues u et v d'une même variable x; nous supposons toujours que les fonctions u et v ont des dérivées. Si l'on donne à la variable x l'accroissement Δx, les fonctions u, v, y éprouvent des accroissements correspondants Δu, Δv, Δy, et l'on a

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v),$$

ou, en effectuant la multiplication et supprimant dans les

deux membres les quantités égales y et uv,

$$\Delta y = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \times \Delta v.$$

On peut rendre l'accroissement Δx de la variable assez petit pour que les accroissements Δu et Δv, et par conséquent Δy, soient aussi petits qu'on veut; ainsi la nouvelle fonction est aussi une fonction continue de la variable x. Divisons tous les termes par Δx, il vient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \times \Delta v.$$

Si l'accroissement Δx de la variable x tend vers zéro, les rapports $\frac{\Delta u}{\Delta x}$, $\frac{\Delta v}{\Delta x}$, tendent vers des limites qui sont les dérivées u', v' des fonctions u, v; le troisieme terme du second membre devient nul, parce que le premier facteur $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ tend vers une valeur finie u', tandis que le second facteur tend vers zéro. On en conclut que le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tend lui-même vers une limite égale à $uv' + vu'$; la fonction y admet donc une dérivée, et l'on a

$$y' = uv' + vu'.$$

Ainsi, *la dérivée d'un produit de deux facteurs égale le premier facteur multiplié par la dérivée du second, plus le second multiplié par la dérivée du premier.*

Lorsqu'une fonction est multipliée par un facteur constant a, il est clair que sa dérivée est multipliée par le même facteur. Soit $y = au$; on a évidemment $\Delta y = a\Delta u$, et par suite $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a\frac{\Delta u}{\Delta x}$; on en déduit $y' = au'$.

103. Considérons maintenant le produit $y = uvw$ de trois

fonctions continues et admettant des dérivées. Si l'on regarde le produit uv des deux premières fonctions comme ne formant qu'un seul facteur, la nouvelle fonction y, d'après le théorème précédent, sera aussi continue et admettra une dérivée, et l'on aura

$$y' = (uv)w' + w(uv)'.$$

Si l'on développe la dérivée $(uv)'$ du produit uv, il vient

$$y' = uvw' + w(uv' + vu'),$$

ou

$$y' = uvw' + uwv' + vwu'.$$

Ainsi, *la dérivée d'un produit de plusieurs facteurs est égale à la somme des produits que l'on obtient en multipliant la dérivée de chaque facteur par le produit de tous les autres.*

Exemples.

1° $$y = (2x - 5)(4x^2 + 7x - 3).$$

$$y' = (2x - 5)(8x + 7) + (4x^2 + 7x - 3)2 = 24x^2 - 12x - 41.$$

2° $$y = x^3(x^2 + 1)(3x - 1).$$

$$y' = x^3(x^2 + 1)3 + x^3(3x - 1)2x + (x^2 + 1)(3x - 1)3x^2$$
$$= 18x^5 - 5x^4 + 12x^3 - 3x^2.$$

Dérivée d'un quotient.

104. Soit le quotient $y = \frac{u}{v}$ de deux fonctions continues et admettant des dérivées. On a

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v},$$

et par suite

$$\Delta y = \frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v+\Delta v)}.$$

On peut rendre Δx assez petit pour que Δu et Δv et par conséquent Δy soient aussi petits qu'on veut; ainsi la nouvelle fonction y varie aussi d'une manière continue avec x. Si l'on divise par Δx, il vient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}.$$

Quand Δx tend vers zéro, les rapports $\frac{\Delta u}{\Delta x}$, $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ tendent vers des limites qui sont les dérivées u' et v' des fonctions u et v; d'ailleurs le dénominateur a pour limite v^2; on en conclut que le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tend vers une limite égale à $\frac{vu'-uv'}{v^2}$; la fonction y admet donc une dérivée, et l'on a

$$y' = \frac{vu'-uv'}{v^2}.$$

Ainsi, la dérivée d'un quotient égale le dénominateur multiplié par la dérivée du numérateur, moins le numérateur multiplié par la dérivée du dénominateur, cette différence étant divisée par le carré du dénominateur.

Exemples.

1°

$$y = \frac{x-1}{x+1},$$

$$y' = \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}.$$

2°
$$y = \frac{5x^2 - 3x + 4}{x^2 - 1}.$$

$$y' = \frac{(x^2-1)(10x-3) - (5x^2-3x+4)2x}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^2 - 8x + 3}{(x^2-1)^2}.$$

3°
$$y = \frac{a^2 + x^2}{a^4 + a^2x^2 + x^4},$$

$$y' = \frac{-2x(a^4+a^2x^2+x^4) - (a^2-x^2)(2a^2x+4x^3)}{(a^4+a^2x^2+x^4)^2}$$
$$= \frac{2x(x^4 - 2a^2x^2 - 2a^4)}{(x^4+a^2x^2+a^4)^2}.$$

Dérivée d'une puissance.

105. Nous avons déjà trouvé (n° 96) la dérivée de la fonction $y = x^m$, quand l'exposant est entier et positif; cette dérivée est $y' = mx^{m-1}$. Nous verrons que la même règle s'étend à un exposant quelconque.

Considérons d'abord le cas où l'exposant m est de la forme $\frac{1}{n}$, n étant un nombre entier positif. On a $y = x^{\frac{1}{n}}$, et par suite $x = y^n$; x est une fonction entière de y; la fonction proposée y de x doit être regardée comme la fonction inverse de celle-ci. A une série de valeurs très-voisines de y correspondent des valeurs très-voisines de x; réciproquement à ces valeurs très-voisines de x, nous faisons correspondre la série des valeurs données primitivement à y; de cette manière, y est une fonction continue de x. Il est facile de trouver la dérivée de la fonction inverse, au moyen de la dérivée de la fonction directe; on a en effet

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)};$$

le rapport $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ a pour limite la dérivée de la fonction entière $x = y^n$, c'est-à-dire ny^{n-1}; le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tend donc vers une limite égale à $\frac{1}{ny^{n-1}}$; si l'on remplace y par $x^{\frac{1}{n}}$, cette expression devient $\frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$. Ainsi la fonction irrationnelle $y = x^{\frac{1}{n}}$ admet une dérivée $y' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = mx^{m-1}$.

106. Supposons maintenant que l'exposant m soit de la forme $\frac{p}{n}$. Si l'on pose $u = x^{\frac{1}{n}}$, la fonction proposée $y = x^{\frac{p}{n}}$ devient $y = u^p$; c'est une fonction entière de la quantité u, qui est elle-même une fonction irrationnelle de la variable x, de la forme considérée précédemment. Quand on donne à x un accroissement très-petit Δx, u éprouve un accroissement très-petit Δu, et par suite y un accroissement très-petit Δy; ainsi y est une fonction continue de x. On a

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \times \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Le rapport $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ a pour limite la dérivée de la fonction $u = x^{\frac{1}{n}}$, c'est-à-dire $\frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$; le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta u}$ a pour limite la dérivée de la fonction $y = u^p$, dans laquelle on regarde u comme la variable indépendante, c'est-à-dire pu^{p-1}. On en conclut que le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tend lui-même vers une limite égale

$$pu^{p-1} \times \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}.$$

Si l'on remplace u par sa valeur $x^{\frac{1}{n}}$, cette expression devient $\frac{p}{n}x^{\frac{p}{n}-1}$. Ainsi la fonction proposée $y=x^{\frac{p}{n}}$ de la variable x admet une dérivée

$$y'=\frac{p}{n}x^{\frac{p}{n}-1}=mx^{m-1}.$$

107. Supposons enfin l'exposant m négatif, et soit $m=-n$, n étant un nombre positif, entier ou fractionnaire. On a

$$y=x^{-n}=\frac{1}{x^n};$$

en appliquant la règle du quotient, on obtient la dérivée

$$y'=\frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}}=-nx^{-n-1}=mx^{m-1}.$$

La même règle, comme on le voit, s'applique à tous les exposants.

Exemples.

1° $y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$, $y'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

2° $y=\frac{1}{x}=x^{-1}$, $y'=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2}$.

3° $y=\frac{1}{x^2}=x^{-2}$, $y'=-2x^{-3}=-\frac{1}{x^3}$.

4° $y=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$, $y'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

108. Considérons maintenant la fonction $y=u^m$ que l'on obtient en élevant à une puissance quelconque m une fonc-

tion continue u de la variable x et admettant une dérivée. Quand on donne à la variable x un accroissement très-petit Δx, u éprouve un accroissement très-petit Δu, et par suite y un accroissement très-petit Δy; ainsi y est une fonction continue de x. On a

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \times \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Le rapport $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ a pour limite la dérivée u' de la fonction u; le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta u}$ a pour limite la dérivée de la fonction $y = u^m$, dans laquelle on regarde u comme la variable indépendante, c'est-à-dire mu^{m-1}. On en conclut que le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tend lui-même vers une limite égale à $mu^{m-1} \times u'$, et par conséquent que y, considérée comme une fonction de x, admet une dérivée

$$y' = mu^{m-1} \times u'.$$

Ainsi, *on obtient la dérivée de la puissance d'une fonction en multipliant par l'exposant, diminuant l'exposant d'une unité, et multipliant le résultat par la dérivée de cette fonction.*

Corollaire. *La dérivée d'une racine carrée égale la dérivée de la fonction placée sous le signe radical divisé par deux fois le radical;* car, en appliquant la règle précédente à la fonction

$$y = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}},$$

on a

$$y' = \frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}-1} u' = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} u' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

Exemples.

1° $$y=\sqrt{2x^3-4x^2+5},\qquad y'=\frac{6x^2-8x}{2\sqrt{2x^3-4x^2+5}}.$$

2° $$y=x(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}.$$

$$y'=(a^2+x^2)\sqrt{a^2-x^2}+2x^2\sqrt{a^2-x^2}-\frac{x^2(a^2+x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{a^4+a^2x^2-4x^4}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

3° $$y=(a+bx^m)^n,$$

$$y'=n(a+bx^m)^{n-1}mbx^{m-1}=mnbx^{m-1}(a+bx)^{n-1}.$$

4° $$y=a+\frac{b}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{c}{x\sqrt[3]{x}}+\frac{d}{x^2}=a+bx^{-\frac{2}{3}}-cx^{-\frac{4}{3}}+dx^{-2},$$

$$y'=-\frac{2}{3}bx^{-\frac{5}{3}}+\frac{4}{3}cx^{-\frac{7}{3}}-2dx^{-3}=-\frac{2b}{3x\sqrt[3]{x^2}}+\frac{4c}{3x^2\sqrt[3]{x}}-\frac{2d}{x^3}.$$

5° $$y=\sqrt[4]{\left(a-\frac{b}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{(c^2-x^2)^2}\right)^3}=\left(a-bx^{-\frac{1}{2}}+(c^2-x^2)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}},$$

$$y'=\frac{3}{4}\left(a-bx^{-\frac{1}{2}}+(c^2-x^2)^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{4}}\times\left(\frac{1}{2}bx^{-\frac{3}{2}}-\frac{4}{3}x(c^2-x^2)^{-\frac{1}{3}}\right).$$

Dérivée de la fonction exponentielle.

109. Nous avons vu (n° 81) que la fonction exponentielle

$$y=a^x,$$

dans laquelle a est un nombre positif constant, varie d'une manière continue avec x. Si l'on donne à la variable x l'accroissement h, la fonction éprouve un accroissement

$$k=a^{x+h}-a^x=a^x(a^h-1),$$

et le rapport des deux accroissements est

$$\frac{k}{h} = a^x \frac{a^h - 1}{h}.$$

Lorsque h est très-petit, la différence $a^h - 1$ est très-petite; posons donc

$$a^h - 1 = \alpha,$$

d'où

$$a^h = 1 + \alpha,$$

et, en prenant les logarithmes népériens des deux membres,

$$h\mathrm{L}a = \mathrm{L}(1+\alpha),$$
$$h = \frac{\mathrm{L}(1+\alpha)}{\mathrm{L}a}.$$

Remplaçons h par sa valeur, l'expression du rapport devient

$$\frac{k}{h} = a^x \frac{\alpha . \mathrm{L}a}{\mathrm{L}(1+\alpha)} = \frac{a^x \mathrm{L}a}{\frac{1}{\alpha}\mathrm{L}(1+\alpha)} = \frac{a^x \mathrm{L}a}{\mathrm{L}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

Lorsque h tend vers zéro, α tend aussi vers zéro, et la quantité $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ devient égale à e (n° 76); mais $\mathrm{L}e = 1$; le rapport $\frac{k}{h}$ tend donc vers une limite égale à $a^x \mathrm{L}a$, et par conséquent la fonction proposée admet une dérivée

$$y' = a^x \mathrm{L}a.$$

Ainsi, *pour avoir la dérivée d'une fonction exponentielle, il suffit de multiplier cette fonction par le logarithme népérien de la base.*

Considérons en particulier la fonction exponentielle

$y = e^x$; puisque $Le = 1$, on a $y' = e^x$. Ainsi, *la dérivée de la fonction* e^x *est cette fonction elle-même.* La fonction e^x jouit de la propriété caractéristique de se reproduire elle-même par la dérivation.

Dérivée de la fonction logarithmique.

110. La fonction $y = \log x$ est l'inverse de la fonction exponentielle $x = a^y$; à chaque valeur réelle et positive de x correspond une valeur réelle de y, et une seule, et quand x varie d'une manière continue, y varie aussi d'une manière continue. On a évidemment

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)};$$

le rapport $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ a pour limite la dérivée de la fonction exponentielle $x = a^y$, c'est-à-dire $a^y La$; le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tend donc vers une limite égale à $\frac{1}{a^y La}$, ou plus simplement à $\frac{1}{x La}$. Ainsi la fonction proposée $y = \log x$ admet une dérivée

$$y' = \frac{1}{x La}.$$

Dans le système népérien, la fonction $y = Lx$ admet pour dérivée $\frac{1}{x}$.

Dérivée du sinus.

111. On a défini en trigonométrie les fonctions circulaires. La fonction

$$y = \sin x$$

varie d'une manière continue avec l'arc x; quand x croît de o à $\frac{\pi}{2}$, y croît de o à 1; x croissant ensuite de $\frac{\pi}{2}$ à π, y décroît de 1 à o. Lorsqu'on donne à la variable x un accroissement h, la fonction éprouve un accroissement

$$k = \sin(x+h) - \sin x.$$

Si l'on transforme en produit cette différence de sinus, on a

$$k = 2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right),$$

et par suite

$$\frac{k}{h} = \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \times \cos\left(x+\frac{h}{2}\right).$$

Quand l'accroissement h de la variable tend vers zéro, le rapport $\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$ du sinus à l'arc $\frac{h}{2}$ tend vers l'unité, tandis que le second facteur se réduit à $\cos x$; le rapport $\frac{k}{h}$ tend donc vers une limite égale à $\cos x$, et par conséquent la fonction proposée admet une dérivée

$$y' = \cos x.$$

Ainsi *la dérivée du sinus est le cosinus.*

Dérivée du cosinus.

112. La fonction

$$y = \cos x$$

varie aussi d'une manière continue avec x. On a de la même manière

$$\frac{k}{h}=\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=\frac{-2\sin\frac{h}{2}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$=-\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right),$$

et par suite

$$\lim\frac{k}{h}=-\sin x.$$

Ainsi *la dérivée du cosinus est le sinus pris en signe contraire.*

Au moyen de ce qui précède, on obtient aisément les dérivées successives du sinus et du cosinus.

$y=\sin x,$	$y=\cos x,$
$y'=\cos x,$	$y'=-\sin x,$
$y''=-\sin x,$	$y''=-\cos x,$
$y'''=-\cos x,$	$y'''=\sin x,$
$y^{(\text{IV})}=\sin x,$	$y^{(\text{IV})}=\cos x,$
. . . .	. . . .
. . . .	. . . .

On voit que les dérivées se reproduisent périodiquement de quatre en quatre. Après deux dérivations, les fonctions $\sin x$ et $\cos x$ se reproduisent avec des signes contraires.

Dérivées de la tangente et de la sécante.

113. La fonction

$$y=\tang x,$$

étant égale au quotient $\frac{\sin x}{\cos x}$ de deux fonctions continues, qui ont des dérivées, admet aussi une dérivée que l'on obtiendra d'après la règle du n° 104 ; on a ainsi

$$y' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

De même la cotangente

$$y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

a pour dérivée

$$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

La sécante pouvant se mettre sous la forme

$$y = \text{séc}\, x = \frac{1}{\cos x},$$

on obtiendra sa dérivée par la règle des quotients

$$y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}.$$

De même la cosécante

$$y = \text{coséc}\, x = \frac{1}{\sin x}$$

a pour dérivée

$$y' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}.$$

Dérivées des fonctions circulaires inverses.

114. La définition des fonctions circulaires inverses exige quelques précautions, parce qu'à chaque valeur de la va-

riable correspondent une infinité d'arcs. Considérons d'abord la fonction

$$y = \text{arc tang } x.$$

Pour définir la fonction d'une manière précise, on donne la valeur y_0 de l'arc pour une valeur particulière x_0 de la tangente. Quand x varie d'une manière continue à partir de x_0, l'un des arcs varie d'une manière continue à partir de y_0; cet arc variable est la fonction y. Par exemple, si l'on suppose que y s'annule avec x, la fonction variera de o à $+\frac{\pi}{2}$, quand x variera de o $+\infty$, et de o à $-\frac{\pi}{2}$, quand x variera de o à $-\infty$.

La fonction proposée est l'inverse de la fonction directe

$$x = \text{tang } y.$$

Nous avons vu que le rapport $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ tend vers une limite égale à $\frac{1}{\cos^2 y}$, le rapport inverse $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tend donc vers une limite égale à $\cos^2 y$, et l'on a

$$y' = \cos^2 y.$$

Mais on sait que

$$\cos^2 y = \frac{1}{1 + \text{tang}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2};$$

on en conclut

$$y' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

115. Soit la fonction inverse

$$y = \text{arc sin } x.$$

On en déduit

$$x = \sin y.$$

Nous avons vu que le rapport $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ tend vers une limite égale à $\cos y$; le rapport inverse $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tend donc vers une limite égale à $\frac{1}{\cos y}$, et l'on a

$$y' = \frac{1}{\cos y}.$$

Puisque $\sin y = x$, on a $\cos y = \pm\sqrt{1-x^2}$; si l'on remplace $\cos y$ par sa valeur, il vient

$$y' = \pm\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Il faudra mettre devant le radical le signe de $\cos y$; si l'arc se termine dans le premier ou dans le quatrième quadrant, on prendra le signe $+$; s'il se termine dans le second ou dans le troisième, on prendra le signe $-$.

116. On obtient de la même manière la dérivée de la fonction inverse

$$y = \operatorname{arc} \cos x.$$

On a, en effet,

$$x = \cos y.$$

Le rapport $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ tendant vers une limite égale à $-\sin y$, le rapport inverse $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tend vers une limite égale à $-\frac{1}{\sin y}$. On a donc

$$y' = -\frac{1}{\sin y} = \pm\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

On mettra devant le radical le signe de $\sin y$.

Résumé.

117. Nous avons trouvé les dérivées des fonctions simples que l'on considère ordinairement en mathématiques; il est nécessaire de les apprendre par cœur: le tableau suivant permet de les embrasser d'un coup d'œil.

$$
\begin{array}{ll}
y = x^m, & y' = mx^{m-1},\ m \text{ étant quelconque}, \\
y = a^x, & y' = a^x \mathrm{L}a, \\
y = e^x, & y' = e^x, \\
y = \log x, & y' = \dfrac{1}{x\mathrm{L}a}, \\
y = \mathrm{L}x, & y' = \dfrac{1}{x}, \\
y = \sin x, & y' = \cos x, \\
y = \cos x, & y' = -\sin x, \\
y = \operatorname{tang} x, & y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}, \\
y = \operatorname{arc} \sin x, & y' = \pm \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \\
y = \operatorname{arc} \cos x, & y' = \pm \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}, \\
y = \operatorname{arc} \operatorname{tang} x, & y' = \dfrac{1}{1 + x^2}.
\end{array}
$$

Dérivée d'une fonction de fonction.

118. A l'aide des fonctions simples que nous venons d'énumérer, on peut former une infinité de fonctions composées. Soit y une fonction $f(u)$ de la quantité u, qui est elle-même une fonction $\varphi(x)$ de la variable x; par l'intermédiaire de la variable u, y pourra être considérée comme une

fonction de x; c'est ce qu'on appelle une *fonction de fonction.* Nous supposons que u est une fonction continue de x admettant une dérivée u' ou $\varphi'(x)$, et que $f(u)$ est une onction continue de u admettant une dérivée $f'(u)$. Si l'on donne à x un accroissement très-petit Δx, il en résulte pour u un accroissement très-petit Δu, et par suite pour y un accroissement très-petit Δy; ainsi y est une fonction continue de la variable x. On a évidemment

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \times \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Quand l'accroissement Δx tend vers zéro, le rapport $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ tend vers la limite u', le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta u}$ tend vers la limite $f'(u)$; le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tend donc vers une limite égale au produit $f'(u) \times u'$; on en conclut que y considérée comme fonction de x, admet une dérivée

$$y' = f'(u) \times u'.$$

Ainsi *la dérivée d'une fonction de fonction est égale au produit des dérivées des fonctions qui la composent.*

Nous avons eu déjà l'occasion de considérer des fonctions de fonctions, quand nous avons cherché la dérivée d'une puissance fractionnaire $y = x^{\frac{p}{n}}$, ou d'une puissance $y = u^m$ d'une fonction de x (n°s 106 et 108); le mode de raisonnement que nous avons employé alors est le même que celui qui nous a servi pour établir le théorème général.

119. Ce théorème peut être généralisé : soit y une fonction $F(v)$ de la quantité v, qui est une fonction $f(u)$ de la quantité u, qui est elle-même une fonction $\varphi(x)$ de la va-

riable x; par l'intermédiare des quantités v et u, y pourra être considérée comme une fonction de la variable x. Nous supposons que les fonctions $F(v)$, $f(u)$, $\varphi(x)$ sont continues et admettent des dérivées $F'(v)$, $f'(u)$, $\varphi'(x)$. Si l'on donne à x un accroissement très-petit Δx, il en résulte pour u un accroissement très-petit Δu, et par suite pour v un accroissement très-petit Δv, et aussi pour y un accroissement très-petit Δy; ainsi y est une fonction continue de x. On a évidemment

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta v} \times \frac{\Delta v}{\Delta u} \times \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Quand Δx tend vers zéro, les rapports $\frac{\Delta u}{\Delta x}$, $\frac{\Delta v}{\Delta u}$, $\frac{\Delta y}{\Delta v}$ tendent respectivement vers des limites u', $f'(u)$, $F'(v)$; le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tend donc vers une limite égale au produit $F'(v) \times f'(u) \times u'$. On conclut que y, considérée comme fonction de x, admet une dérivée

$$y' = F'(v) \times f'(u) \times u'.$$

120. Puisque les fonctions simples que nous avons étudiées ont des dérivées, il résulte du théorème précédent que les fonctions composées que l'on formera en combinant ces fonctions simples d'une manière quelconque admettront aussi des dérivées. En voici quelques exemples.

1° $y = \sin x^2$. Si l'on pose $u = x^2$, on a $y = \sin u$, et l'on voit que y est une fonction de fonction. L'application du théorème donne

$$y' = \cos u \times u' = 2x \cos x^2.$$

2° $y = e^{\sin x}$. Si l'on pose $u = \sin x$, on a encore une

fonction de fonction $y=e^u$, qui admet pour dérivée

$$y'=e^u\times u'=e^{\sin x}\cos x.$$

3° $y=e^{\sin x^2}$. Si l'on pose $u=x^2$, $v=\sin u$, on a une fonction de fonction $y=e^v$ plus compliquée que les précédentes; le même théorème donne

$$y'=e^v.\cos u.2x=2xe^{\sin x^2}\cos x^2.$$

4° $y=\mathrm{L}(x+\sqrt{1+x^2})$. En posant $u=x+\sqrt{1+x^2}$, on a la fonction de fonction $y=\mathrm{L}u$, qui admet pour dérivée

$$y'=\frac{1}{u}\times u'=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

5° $y=x^x$. En remarquant que, d'après la définition même des logarithmes, on a identiquement $x=e^{\mathrm{L}x}$, on pourra mettre cette fonction sous la forme $y=e^{x\mathrm{L}x}$; si l'on pose $u=x\mathrm{L}x$, on a la fonction de fonction $y=e^u$, qui admet pour dérivée

$$y'=e^uu'=e^u(1+\mathrm{L}x)=x^x(1+\mathrm{L}x).$$

Par l'habitude, on arrive à décomposer les fonctions complexes par la pensée, sans employer les lettres auxiliaires u et v.

Exercices.

Trouver les dérivées des fonctions suivantes :

1° $y=\arc\sin x-\sqrt{1-x^2}$. *Rép.:* $y'=\dfrac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}$.

2° $y=\operatorname{tang}x-\cot x$. $y'=\dfrac{1}{\sin^2x\cos^2x}$.

3° $y = x(\mathrm{L}x - 1)$, $y' = \mathrm{L}x$.

4° $y = e^x(x - 1)$, $y' = xe^x$.

5° $y = x \sin x + \cos x$, $y' = x \cos x$.

6° $y = -x \cos x + \sin x$, $y' = x \sin x$.

7° $y = \frac{1}{2} \mathrm{L}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$, $y' = \frac{1}{x^2 - 1}$.

8° $y = \mathrm{L}(x + \sqrt{x^2 - 1})$, $y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

9° $y = \mathrm{L}\left(\frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x}\right)$, $y' = \frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}}$.

10° $y = \mathrm{arc}\cos\left(\frac{a - 2x}{a}\right)$, $y' = \frac{1}{\sqrt{ax - x^2}}$.

11° $y = \frac{1}{6} \mathrm{L}\left(\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \mathrm{arc\,tang} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$, $y' = \frac{1}{x^3 - 1}$.

12° $y = \mathrm{arc\,séc}\, x$, $y' = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$.

CHAPITRE II.

ÉTUDE DE LA VARIATION DES FONCTIONS.

121. Soit $f(x)$ une fonction continue, $f'(x)$ sa dérivée. Nous avons appelé dérivée d'une fonction la limite du rapport de l'accroissement k de la fonction à l'accroissement h de la variable, quand ces accroissements tendent vers zéro.

Lorsque h est très-petit, le rapport $\frac{k}{h}$ diffère très-peu de sa limite; on a donc

$$\frac{k}{h} = f'(x) + \varepsilon,$$

d'où

$$k = h[f'(x) + \varepsilon],$$

ε étant une quantité très-petite qui s'annule avec h. Quand la dérivée $f'(x)$ n'est pas nulle, on peut déterminer une quantité positive α telle que, si l'on attribue à h une valeur positive quelconque inférieure à α, la quantité ε soit moindre que $f'(x)$ en valeur absolue. C'est alors la quantité $f'(x)$ qu donne son signe à la parenthèse; h étant positive, il en résulte que la variation k de la fonction a le signe de la dérivée $f'(x)$. Si la dérivée est positive, k est positive, et par suite, pour toute valeur de h inférieure à α, $f(x+h)$ est plus grande que $f(x)$; si la dérivée est négative, k est négative et par suite $f(x+h)$ plus petite que $f(x)$. Ainsi, *quand la variable croît à partir d'une valeur* x, *si pour cette valeur la dérivée est positive, la fonction commence par croître; si la dérivée est négative, la fonction commence par décroître.*

Supposons maintenant que la dérivée d'une fonction reste positive pour toutes les valeurs de x comprises entre x_0 et x_1, la quantité x_1 étant plus grande que x_0; il est évident, d'après ce qui précède, que si x croît de x_0 à x_1, la fonction ira en croissant dans tout cet intervalle. Au contraire, si la dérivée est négative pour toutes les valeurs de x comprises entre x_0 et x_1, la fonction ira en décroissant.

Cette proposition subsiste, même quand la dérivée s'annule dans l'intervalle de x_0 à x_1; il suffit qu'elle ne change pas de signe. Supposons, par exemple, que la dérivée, restant positive de x_0 à x_1, s'annule pour une valeur intermédiaire a; appelons α une quantité positive très-petite, mais déterminée; quand x varie de x_0 à $a-\alpha$, la dérivée étant positive, la fonction croît; x variant ensuite de $a+\alpha$ à x_1, et la dérivée restant positive, la fonction croît encore;

comme l'intervalle 2α est aussi petit qu'on veut et que la fonction est continue, on en conclut que la fonction va sans cesse en croissant, quand x varie de x_0 à x_1.

122. Lorsqu'une fonction, après avoir augmenté, décroît ensuite, elle passe par un *maximum*, c'est-à-dire par une valeur plus grande que les valeurs voisines. Au contraire, lorsqu'une fonction, après avoir diminué, croît ensuite, elle passe par un *minimum*, c'est-à-dire par une valeur plus petite que les valeurs voisines.

Dans le premier cas, la fonction commençant par croître, la dérivée est d'abord positive; la fonction décroissant ensuite, la dérivée devient négative. Ainsi, quand la fonction passe par un maximum, la dérivée change de signe, de positive devenant négative.

Dans le second cas, la fonction commençant par décroître, la dérivée est d'abord négative; la fonction croissant ensuite, la dérivée devient positive. Ainsi, quand la fonction passe par un minimum, la dérivée change de signe, de négative devenant positive.

Les réciproques sont vraies : lorsque la dérivée change de signe, la fonction passe par un maximum ou par un minimum. Si la dérivée de positive devient négative, la fonction, croissant d'abord pour décroître ensuite, passe par un maximum; si la dérivée de négative devient positive, la fonction, décroissant d'abord pour croître ensuite, passe par un minimum.

Ordinairement la dérivée d'une fonction continue est aussi finie et continue; elle change de signe en passant par la valeur intermédiaire zéro. On obtiendra donc en général les valeurs de x qui rendent la fonction maximum ou minimum en cherchant les valeurs de x qui annulent la dérivée, et qui en outre lui font éprouver un changement de signe.

Exemples.

123. QUESTION I. *Étudier la variation du volume d'un cylindre circulaire droit dont la surface totale est constante.*

Appelons x le rayon de la base, y la hauteur, et représentons la surface totale donnée par $2\pi a^2$, nous avons la relation

$$2\pi x^2 + 2\pi xy = 2\pi a^2,$$

ou plus simplement

$$x^2 + xy = a^2.$$

Le volume V du cylindre a pour expression

$$V = \pi x^2 y,$$

et si l'on remplace y par sa valeur $y = \frac{a^2 - x^2}{x}$ tirée de la relation précédente,

$$V = \pi x(a^2 - x^2) = \pi(a^2 x - x^3);$$

c'est une fonction de la variable indépendante x.

Les valeurs de x et de y devant rester positives, le rayon x de la base ne pourra varier que de o à a. Quand x varie de o à a, on voit que le volume part de zéro pour revenir à zéro, en passant par une suite de valeurs finies et positives; il commence par croître pour décroître ensuite, et par conséquent passe certainement par un maximum. Pour étudier d'une manière complète la variation de cette fonction, prenons sa dérivée

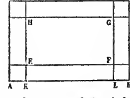
$$V' = \pi(a^2 - 3x^2) = 3\pi\left(\frac{a^2}{3} - x^2\right).$$

La dérivée est positive pour les valeurs positives de x inférieures à $\frac{a}{\sqrt{3}}$, négative pour les valeurs de x supérieures à $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

Si donc on fait croître x de o à $\frac{a}{\sqrt{3}}$, le volume ira en augmentant de zéro à une certaine valeur maximum; x croissant ensuite de $\frac{a}{\sqrt{3}}$ à a, le volume ira en diminuant de cette valeur maximum à o.

Pour $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$, on a $y = \frac{2a}{\sqrt{3}}$. Ainsi, parmi tous les cylindres qui ont même surface totale, le plus grand est celui dont la hauteur est égale au diamètre de la base.

124. QUESTION II. *Étant donnée une feuille de carton rectangulaire* ABCD, *si, après avoir mené des parallèles aux quatre côtés à la même distance, on enlève les petits carrés dans les angles, et qu'on relève les portions rectangulaires telles que* EKLF, *on forme une boîte à fond rectangulaire* EFGH. *Étudier la variation du volume de cette boîte.*



Appelons $2a$ et $2b$ les côtés AB et AD de la feuille de carton, x la distance variable AK à laquelle on mène les parallèles; le fond de la boîte est un rectangle ayant pour côtés $EF = 2(a - x)$ et $EH = 2(b - x)$, et pour surface $4(a - x)(b - x)$; la hauteur de la boîte est x; le volume a donc pour expression

$$V = 4x(a - x)(b - x).$$

Si l'on suppose $a > b$, x peut varier de o à b; le volume part de zéro pour revenir à zéro, en conservant des valeurs finies; il commence par croître pour décroître ensuite, et par conséquent passe par un maximum. La dérivée de cette

fonction est

$$V' = 4[3x^2 - 2(a+b)x + ab].$$

La parenthèse est un polynôme entier du second degré. Si dans ce polynôme on remplace x par zéro, on a un résultat positif $+ab$; si l'on remplace x par b, on a un résultat négatif $-4b(a-b)$; ainsi le polynôme a ses deux racines réelles, la plus petite x' comprise entre o et b, la plus grande x'' supérieure à b, et l'on écrira

$$V' = 12(x-x')(x-x'').$$

Quand x croît de o à x', la dérivée étant positive, le volume augmente de zéro à une certaine valeur maximum; x croissant ensuite de x' à b, la dérivée devient négative et le volume diminue de cette valeur maximum jusqu'à zéro.

Le volume acquiert sa valeur maximum pour la valeur

$$x = x' = \frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2-ab}}{3}.$$

125. Question III. ***Étudier la variation de la surface totale d'un cylindre circulaire droit inscrit dans une sphère donnée.***

Si l'on appelle x le rayon de la base et $2y$ la hauteur du cylindre, on a

$$x^2 + y^2 = r^2.$$
$$S = 2\pi x^2 + 4\pi xy;$$

d'où

$$S = 2\pi\left(x^2 + 2x\sqrt{r^2-x^2}\right).$$

Le rayon x peut varier de o à r. La fonction S, que l'on veut étudier, a pour dérivée

$$S' = \frac{4\pi\left[x\sqrt{r^2-x^2} + (r^2 - 2x^2)\right]}{\sqrt{r^2-x^2}}.$$

Quand x croît de o à $\frac{r}{\sqrt{2}}$, la dérivée est positive et la fonction croît de zéro à $3\pi r^2$. Faisons maintenant varier x de $\frac{r}{\sqrt{2}}$ à r; on a

$$S' = \frac{4\pi\left[x\sqrt{r^2-x^2}-(2x^2-r^2)\right]}{\sqrt{r^2-x^2}}.$$

La parenthèse est la différence de deux quantités positives; si l'on multiplie et si l'on divise par la somme, il vient

$$S' = \frac{4\pi\left[x^2(r^2-x^2)-(2x^2-r^2)^2\right]}{\left[x\sqrt{r^2-x^2}+(2x^2-r^2)\right]\sqrt{r^2-x^2}},$$

$$S' = \frac{4\pi(-5x^4+5r^2x^2-r^4)}{\left[x\sqrt{r^2-x^2}+(2x^2-r^2)\right]\sqrt{r^2-x^2}}.$$

Le dénominateur étant positif, il suffit d'examiner le signe du numérateur, qui est un polynôme entier du second degré en x^2. Quand, dans ce polynôme pris sous sa première forme, on remplace x^2 par $\frac{r^2}{2}$, on obtient un résultat positif; quand on remplace x^2 par r^2, on obtient un résultat négatif; on en conclut que les deux racines du trinôme sont réelles, que la plus petite x'^2 est inférieure à $\frac{r^2}{2}$ et la plus grande x''^2 comprise entre $\frac{r^2}{2}$ et r^2. On a donc

$$S' = \frac{-20\pi(x^2-x'^2)(x^2-x''^2)}{\left[x\sqrt{r^2-x^2}+(2x^2-r^2)\right]\sqrt{r^2-x^2}}.$$

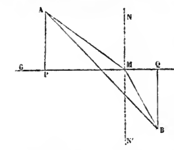
Quand x varie de $\frac{r}{\sqrt{2}}$ à x'', la dérivée est positive, et la

fonction continue à croître de $5\pi r^2$ jusqu'à une valeur maximum; x variant ensuite de x'' à r, la dérivée est négative, et la fonction décroît de la valeur maximum à $2\pi r^2$. Le maximum de la surface est donné par la valeur

$$x = x'' = r\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}.$$

126. QUESTION IV. *Soit* GH *la ligne de séparation de deux milieux; la lumière se meut dans ces deux milieux avec des vitesses différentes* v *et* v'. *Quel chemin doit suivre le rayon lumineux pour aller du point* A *au point* B *dans le temps le plus court?*

Nous pouvons déterminer la position des points A et B par leurs distances AP et BQ à la droite GH, et par la distance PQ; nous désignerons ces trois longueurs connues par a, b, c. Si la vitesse était la même dans les deux milieux, il est clair que la lumière suivrait le chemin le plus court, c'est-à-dire la droite AB; mais la vitesse v dans le milieu supérieur



étant plus grande que la vitesse v' dans le milieu inférieur, il y a avantage à ce que la lumière parcoure une plus grande longueur dans le premier milieu et une moindre dans le second; elle suivra donc une ligne brisée telle que AMB. Appelons x la distance cherchée PM; la lumière parcourt dans les deux milieux les longueurs

$$AM = \sqrt{a^2 + x^2}, \quad MB = \sqrt{b^2 - (c - x)^2};$$

elle emploie à les parcourir les temps

$$\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v}, \quad \frac{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}{v'};$$

elle met donc, pour aller de A à B, en suivant le chemin AMB, le temps

$$t=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v}+\frac{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}{v'}.$$

Ce temps est une fonction de x, considérée comme variable indépendante; elle a pour dérivée

$$t'=\frac{x}{v\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{c-x}{v'\sqrt{b^2+(c-x^2)}}.$$

Au point M menons une perpendiculaire NN' à GH ; l'angle AMN est l'angle d'incidence i, l'angle BMN' l'angle de réfraction i'. Comme on a

$$\sin i=\frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{AM}}=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}},$$
$$\sin i'=\frac{\mathrm{QM}}{\mathrm{BM}}=\frac{c-x}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}};$$

il en résulte cette expression de la dérivée

$$t'=\frac{\sin i}{v}-\frac{\sin i'}{v'}.$$

Quand le point M se déplace de P à Q, l'angle i augmente de zéro à une certaine valeur, tandis que l'angle i' diminue au contraire d'une certaine valeur à zéro. Il y a donc un point, et un seul, pour lequel la dérivée s'annule : avant, elle est négative; au delà, elle devient positive. La fonction que l'on étudie diminue jusque-là pour augmenter

ensuite. Le minimum a lieu, quand on a

$$\frac{\sin i}{v} = \frac{\sin i'}{v'},$$

ou

$$\frac{\sin i}{\sin i'} = \frac{v}{v'}.$$

C'est par cette considération du temps minimum que Fermat a trouvé pour la première fois la loi de la réfraction de la lumière.

127. Question V. ***Étudier la variation de la surface d'un secteur sphérique de volume constant.***

Appelons x le rayon du secteur, y la hauteur de la calotte qui lui sert de base, et supposons que le volume soit égal à celui d'une sphère de rayon donné a; nous aurons la relation

$$\frac{2}{3}\pi x^2 y = \frac{4}{3}\pi a^3,$$

ou plus simplement

$$x^2 y = 2a^3, \qquad y = \frac{2a^3}{x^2}.$$

La surface du secteur a pour expression

$$S = \pi x\sqrt{y(2x-y)} + 2\pi xy,$$

et, si l'on remplace y par sa valeur,

$$S = 2\pi a\left[\frac{2a^2}{x} + \sqrt{a\left(x - \frac{a^3}{x^2}\right)}\right].$$

La hauteur y de la calotte étant plus petite que le diamètre $2x$, le rayon x est plus grand que a; ainsi la va-

riable x peut croître à partir de a indéfiniment. La surface a pour dérivée

$$S' = \frac{\pi a^2\left[x^3 + 2a^3 - 4a\sqrt{a(x^3 - a^3)}\right]}{x^2\sqrt{a(x^3 - a^3)}}.$$

Le numérateur est la différence de deux quantités; si l'on multiplie les deux termes de la fraction par la somme, on a

$$S' = \frac{\pi a^2(x^6 - 12a^3x^3 + 20a^6)}{x^2\sqrt{a(x^3 - a^3)}\left[x^3 + 2a^3 + 4a\sqrt{a(x^3 - a^3)}\right]}.$$

Le dénominateur étant positif, il suffit d'examiner le signe du trinôme

$$x^6 - 12a^3x^3 + 20a^6,$$

qui est du second degré par rapport à x^3, et qui, décomposé en facteurs, s'écrit

$$(x^3 - 2a^3)(x^3 - 10a^3).$$

Quand x varie de a à $a\sqrt[3]{2}$, la dérivée étant positive, la surface croît; x variant de $a\sqrt[3]{2}$ à $a\sqrt[3]{10}$, la dérivée est négative, et la surface décroît; x croissant ensuite indéfiniment au delà de $a\sqrt[3]{10}$, la dérivée est positive, et la surface augmente.

Examinons maintenant les formes successives par lesquelles passe le secteur. Lorsque $x = a$, on a $y = 2a$, $S = 4\pi a^2$; le secteur se réduit à une sphère de rayon a. Le rayon x croissant de a à $a\sqrt[3]{2}$, y décroît de $2a$ à $a\sqrt[3]{2}$; le secteur, qui est plus grand qu'un hémisphère, s'ouvre de plus en plus, jusqu'à ce qu'il arrive à la forme d'un hémisphère; la surface augmente de la valeur ini-

tiale $4\pi a^2$ au *maximum* $5\pi a^2\sqrt[3]{4}$. Le rayon croissant ensuite de $a\sqrt[3]{2}$ à $a\sqrt[3]{10}$, y décroît de $a\sqrt[3]{2}$ à $\frac{a\sqrt[3]{10}}{5}$, le secteur, qui est maintenant moindre qu'un hémisphère, s'allonge jusqu'à ce que la hauteur de la calotte ne soit que le cinquième du rayon; sa surface diminue du maximum $5\pi a^2\sqrt[3]{4}$ au *minimum* $\pi a^2\sqrt[3]{100}$. Le rayon x croissant ensuite au delà de $a\sqrt[3]{10}$ indéfiniment, y diminue et tend vers zéro; le secteur continue à s'allonger, et sa surface augmente indéfiniment.

On peut remarquer que la valeur minimum $\pi a^2\sqrt[3]{100}$, par laquelle passe la surface pour $x = a\sqrt[3]{10}$, est plus grande que la valeur initiale $4\pi a^2$. Ainsi, c'est quand le secteur a la forme d'une sphère que sa surface est la plus petite possible. Nous remarquerons encore que la surface passe *une* seule fois par toute valeur comprise entre la valeur initiale $4\pi a^2$ et le minimum $\pi a^2\sqrt[3]{100}$, *trois* fois par toute valeur comprise entre ce minimum et le maximum $5\pi a^2\sqrt[3]{4}$, et en *une* seule fois par toute valeur plus grande que ce maximum.

128. Question VI. ***Étudier la variation du volume du sphérique dont la surface totale est constante.***

On peut déduire cette question de la précédente. Il sera plus commode de prendre pour variable, non pas le rayon x du secteur ou la hauteur y de la calotte, mais le rapport $\frac{x}{y}$ de ces deux longueurs, rapport que nous désignerons par z. Cette nouvelle variable caractérisera la forme du solide et aura la même valeur pour tous les solides semblables.

Quand x croît de a à ∞, y décroît de $2a$ à o, et par conséquent z croît de $\frac{1}{2}$ à ∞. Donnons à la nouvelle variable deux valeurs z et z'. Soient S et S' les surfaces totales des solides correspondants, quand le volume V reste constant; imaginons que l'on change les dimensions du second solide en le laissant semblable à lui-même, de manière que sa surface, qui était S', devienne égale à S; son volume, qui était V, acquerra la valeur V' donnée par la relation

$$\left(\frac{V'}{V}\right)^2 = \left(\frac{S}{S'}\right)^3.$$

Ainsi, quand on passe d'une forme à une autre en laissant constant, soit le volume, soit la surface, on voit que la surface dans le premier cas, le volume dans le second cas, varient en sens contraires; si la surface augmente, le volume diminue ou inversement. A un minimum de la surface correspondra un maximum du volume et à un maximum de la surface un minimum de volume.

La variable z croissant de $\frac{1}{2}$ à 1, le secteur passe de la forme d'une sphère entière à celle d'un hémisphère et le volume diminue; z croissant de 1 à 5, le volume augmente; z croissant à partir de 5 indéfiniment, le volume diminue et tend vers zéro. Le volume a passé d'abord par un minimum, puis par un maximum.

La plupart des questions géométriques se correspondent ainsi deux à deux (voyez la première partie, n° 181).

Exercices.

1° Étudier la variation de la surface d'un trapèze inscrit dans un demi-cercle.

2° Étudier la variation de la surface totale d'un cône circulaire droit inscrit dans une sphère donnée.

3° Étudier la variation du volume d'un parallélipipède rectangle à base carrée dont la surface totale est donnée.

4° Étudier la variation du volume d'une niche de surface donnée.

5° On fait mouvoir une lumière sur une droite verticale; étudier la variation de la quantité de lumière reçue par une portion très-petite du plan horizontal.

6° On fait mouvoir une lumière sur un cercle, étudier la variation de la quantité de lumière reçue par une portion très-petite d'un diamètre fixe.

7° Sur les faces d'un cube on place six pyramides régulières de même hauteur; la surface totale étant donnée, étudier la variation du volume du solide ainsi formé.

8° Sur les faces d'un tétraèdre régulier on place quatre pyramides composées chacune de trois triangles isocèles égaux. La surface totale étant donnée, étudier la variation du volume du solide ainsi formé.

9° Un aéromètre est formé d'un cylindre de rayon donné terminé par deux cônes égaux. La surface totale étant donnée, étudier la variation du volume.

10° Étudier la variation de la surface d'un segment de cercle dont l'arc a une longueur donnée.

11° Un triangle est formé par trois arcs de cercle égaux entre eux et de longueur donnée; étudier la variation de la surface.

12° Un polygone régulier est formé par n arcs de cercle égaux entre eux et de longueur donnée, étudier la variation de la surface.

CHAPITRE III.

DÉRIVÉES D'UNE FONCTION DE PLUSIEURS VARIABLES.

129. Jusqu'ici nous n'avons considéré que des fonctions d'une seule variable; nous allons dire quelques mots des fonctions de plusieurs variables. Soit $f(x, y)$ une fonction de deux variables indépendantes x et y (on nomme variables indépendantes des quantités qui varient d'une manière tout à fait arbitraire et indépendamment l'une de l'autre). Si, regardant y comme une constante, nous prenons la dérivée de la fonction par rapport à la variable x, nous aurons ce qu'on appelle la *dérivée partielle* de la fonction par rapport à x. De même, si regardant x comme une constante, nous prenons la dérivée par rapport à la variable y, nous aurons la dérivée partielle par rapport à y. Telles sont les deux dérivées partielles du premier ordre de la fonction proposée; nous les désignerons par les notations f'_x et f'_y, l'indice indiquant la lettre par rapport à laquelle on prend la dérivée.

Si l'on prend deux fois successivement la dérivée, soit deux fois par rapport à x, soit une fois par rapport à x et une seconde fois par rapport à y, soit deux fois par rapport à y, on obtient trois dérivées partielles du second ordre que nous désignerons par les notations f''_{x^2}, f''_{xy}, f''_{y^2}. Et ainsi de suite.

Par exemple, soit la fonction

$$f(x, y) = 3x^2 - 5xy + y^2 - 3x + 4y + 2.$$

En prenant les dérivées par rapport à x ou par rapport à

y, on a les deux dérivées partielles du premier ordre

$$f'_x = 6x - 5y - 3,$$
$$f'_y = -5x + 2y + 4.$$

En prenant la dérivée une seconde fois, soit par rapport à x, soit par rapport à y, on forme les trois dérivées partielles du second ordre

$$f''_{x^2} = 6, \quad f''_{xy} = -5, \quad f''_{y^2} = 2.$$

Les dérivées suivantes sont nulles.

Théorème sur les fonctions homogènes.

130. On dit qu'une fonction entière de $x, y, z, \ldots$ est homogène et du degré m, lorsque la somme des exposants de ces lettres dans chacun des termes est constante et égale à m. Afin de préciser, nous supposerons que la fonction contient trois lettres x, y, z. Chacun des termes est de la forme $Ax^n y^p z^q$, et l'on peut écrire

$$f(x, y, z) = \Sigma A x^n y^p z^q.$$

En prenant la dérivée par rapport à chacune des lettres, on a

$$f'_x = \Sigma n A x^{n-1} y^p z^q,$$
$$f'_y = \Sigma p A x^n y^{p-1} z^q,$$
$$f'_z = \Sigma q A x^n y^p z^{q-1}.$$

Si l'on multiplie ces dérivées respectivement par x, y, z, il vient

$$x f'_x = \Sigma n A x^n y^p z^q,$$
$$y f'_y = \Sigma p A x^n y^p z^q,$$
$$z f'_z = \Sigma q A x^n y^p z^q.$$

On en déduit

$$xf'_x + yf'_y + zf'_z = \Sigma(n+p+q)Ax^n y^p z^q.$$

La somme des exposants $n+p+q$ étant constante et égale à m, on a

$$xf'_x + yf'_y + zf'_z = m\Sigma Ax^n y^p z^q,$$

ou

$$xf'_x + yf'_y + zf'_z = mf(x, y, z).$$

Dérivées des fonctions composées.

131. Soit une fonction $f(u, v)$ de deux quantités u et v qui sont elles-mêmes des fonctions de la variable x; il est clair que y est en définitive une fonction de la variable x. On demande sa dérivée. Si l'on donne à la variable x l'accroissement Δx, il en résulte pour u et v les accroissements Δu et Δv, pour y l'acroissement Δy, et l'on a

$$\Delta y = f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v),$$

ou

$$\Delta y = f(u+\Delta u, v+\Delta v) - f(u, v+\Delta v) + f(u, v+\Delta v) - f(u, v).$$

En divisant par Δx, on a

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u+\Delta u, v+\Delta v) - f(u, v+\Delta v)}{\Delta u} \times \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{f(u, v+\Delta v) - f(u, v)}{\Delta v} \times \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Supposons maintenant que Δx tende vers zéro, les rapports $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ et $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ tendent vers les dérivées u' et v' des fonctions u et v. Dans le rapport

$$\frac{f(u, v+\Delta v) - f(u, v)}{\Delta v},$$

on voit que le numérateur est l'accroissement qu'éprouve la fonction $f(u, v)$ quand on donne à la variable v l'accroissement Δv, u restant constante; la limite de ce rapport est donc la dérivée partielle $f'_v(u, v)$ de la fonction $f(u, v)$ par rapport à v, et le second terme a pour limite

$$f'_v(u, v) \times v'.$$

Considérons maintenant le rapport

$$\frac{f(u + \Delta u,\ v + \Delta v) - f(u,\ v + \Delta v)}{\Delta u};$$

le numérateur est l'accroissement qu'éprouve la fonction $f(u,\ v + \Delta v)$ quand on donne à la variable u l'accroissement Δu; ce rapport, en vertu du principe établi au n° 121, est donc égal à

$$f'_u(u, v + \Delta v) + \varepsilon,$$

la quantité ε s'évanouissant avec Δu. D'autre part, $f'_u(u, v)$ étant une fonction continue de v, on a

$$f'_u(u,\ v + \Delta v) = f'_u(u, v) + \varepsilon',$$

la quantité ε' s'évanouissant avec Δv; il en résulte que le rapport considéré est égal à

$$f'_u(u, v) + \varepsilon + \varepsilon'.$$

Si maintenant on fait tendre Δx vers zéro, Δu et Δv tendent aussi vers zéro, ainsi que ε et ε', et le rapport a pour limite $f'_u(u, v)$. La limite du premier terme est donc

$$f'_u(u, v) \times u'.$$

On a de la sorte

$$y' = f'_u(u, v) \times u' + f'_v(u, v) \times v'.$$

Ainsi la dérivée d'une fonction de deux fonctions u et v d'une même variable x égale la dérivée partielle de la fonction proposée par rapport à u multipliée par la dérivée de u, plus la dérivée partielle par rapport à v multipliée par la dérivée de v.

Exemples.

1° Prenons comme exemple la fonction $y = x^x$, dont nous avons déjà trouvé la dérivée (n° 120). Si l'on pose $u = x$, $v = x$, on a $y = u^v$; d'où, en appliquant le théorème précédent,

$$y' = vu^{v-1}u' + u^v \mathrm{L}u \,.\, v' = x^x + x^x \mathrm{L}x = x^x(1 + \mathrm{L}x).$$

2° $y = (\sin x)^{4x}$. Posant $u = \sin x$, $v = 4x$, on aura de même $y = u^v$; d'où

$$y' = vu^{v-1}u' + u^v \mathrm{L}u \,.\, v' = 4x \cos x (\sin x)^{4x-1} + 4(\sin x)^{4x} \mathrm{L}(\sin x).$$

Dérivées des fonctions implicites.

132. On dit qu'une fonction est *implicite* lorsqu'elle est liée à la variable par une équation non résolue. Ainsi l'équation

$$f(x, y) = 0,$$

dans laquelle le premier membre est une fonction quelconque des deux variables x et y, définit une fonction implicite y de x. Si l'on pouvait résoudre l'équation, on en déduirait $y = \varphi(x)$ et la fonction deviendrait *explicite*.

On obtient aisément la dérivée d'une fonction implicite. En effet, prenons la dérivée de la fonction $f(x, y)$, dans laquelle nous regardons x comme la variable indépendante,

et y comme une fonction de x; cette dérivée, d'après le théorème précédent, est égale à

$$f'_x + f'_y \times y'.$$

Comme la fonction $f(x, y)$ est constamment nulle, sa dérivée est aussi constamment nulle, et l'on a l'équation

$$f'_x + f'_y \times y' = 0,$$

d'où l'on déduit

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y}.$$

Telle est l'expression de la dérivée de la fonction implicite y.

Exemples.

1° Considérons la fonction implicite y définie par l'équation

$$x^2 - 4xy + y^2 + 2x = 0.$$

On a, d'après la formule que nous venons d'établir,

$$y' = -\frac{2x - 4y + 2}{-4x + 2y} = \frac{2y - x - 1}{y - 2x}.$$

L'équation proposée, étant du second degré par rapport à y, peut être résolue, ce qui donne

$$y = 2x \pm \sqrt{3x^2 - 2x}.$$

La fonction devenant ainsi explicite, on trouve directement sa dérivée,

$$y' = 2 \pm \frac{3x - 1}{\sqrt{3x^2 - 2x}}.$$

En remplaçant y par sa valeur dans la première expression de y', on obtient la seconde.

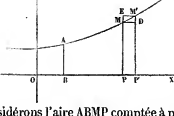
$$2^\circ \quad 3x^5 - 4xy + y^3 = 0, \qquad y' = -\frac{15x^4 - 4y}{-4x + 3y^2}.$$

CHAPITRE IV.

DES FONCTIONS PRIMITIVES.

133. On appelle *fonction primitive* d'une fonction donnée une fonction dont la fonction proposée est la dérivée. Nous démontrerons d'abord l'existence de la fonction primitive, qu'on puisse ou non l'exprimer au moyen des signes de l'algèbre.

Soit $y = f(x)$ la fonction proposée; représentons cette fonction par une courbe, comme nous l'avons expliqué au n° 97, en portant sur la ligne horizontale OX, à partir du point O, des longueurs égales aux diverses valeurs de la variable x, et élevant des perpendiculaires ou ordonnées égales aux valeurs correspondantes de y. Considérons l'aire ABMP comptée à partir d'une ordonnée fixe AB jusqu'à une ordonnée mobile MP; cette aire est une fonction de x; car si l'on fait croître x, l'ordonnée MP s'éloignant, l'aire augmente; nous désignerons cette fonction par $F(x)$. Je vais démontrer que la fonction $F(x)$, ainsi défi-



nie, est une fonction primitive de la fonction proposée $f(x)$. Concevons, en effet, que l'on donne à x un accroissement $PP' = h$; l'accroissement k de la fonction $F(x)$ sera l'aire du trapèze curviligne MPP'M'; par les points M et M' menons les horizontales MD, M'E; on voit que l'aire du trapèze curviligne est comprise entre celles des rectangles MPP'D et EPP'M'; ces rectangles ont pour mesure $MP \times h$, $M'P' \times h$; on a donc

$$MP \times h < k < M'P' \times h,$$

et en divisant par h,

$$MP < \frac{k}{h} < M'P'.$$

Quand h tend vers zéro, l'ordonnée M'P' devient égale à MP; donc la limite de $\frac{k}{h}$, ou la dérivée $F'(x)$, est égale à l'ordonnée MP, c'est-à-dire à $f(x)$. Ainsi la fonction proposée $f(x)$ est la dérivée de la fonction $F(x)$; et, réciproquement, la fonction $F(x)$ est une fonction primitive de $f(x)$.

Il résulte de là qu'une fonction continue quelconque a une fonction primitive, que l'on peut représenter par une aire plane. Si à la fonction primitive $F(x)$ on ajoute une constante arbitraire C, on aura encore une fonction primitive $F(x) + C$; car la constante ne donne rien dans la dérivée.

Nous verrons, par ce qui suivra, que l'addition de cette constante arbitraire donne toutes les fonctions primitives de la fonction proposée.

134. Démontrons d'abord que, lorsqu'une fonction continue a sa dérivée constamment nulle, cette fonction est constante.

Imaginons la fonction figurée par une ligne. Si l'on désigne par α l'angle que fait la tangente à la ligne en un point quelconque avec l'horizontale OX, nous savons (n° 97) que la dérivée de la fonction représente tang α. Puisque la dérivée est constamment nulle, l'angle α est lui-même constamment nul. Ainsi la ligne en chacun de ses points a sa tangente horizontale; ce ne peut être qu'une ligne droite horizontale AB. L'ordonnée MP de chacun des points de cette ligne droite est constante; on en conclut que la fonction proposée a une valeur constante.

Soient maintenant deux fonctions $F(x)$ et $\varphi(x)$, ayant même dérivée $f(x)$, je dis que ces deux fonctions ne peuvent différer que par une constante. En effet, on a, par hypothèse,

$$\varphi'(x) = f(x),$$
$$F'(x) = f(x);$$

si l'on retranche ces deux égalités l'une de l'autre, il vient

$$\varphi'(x) - F'(x) = 0.$$

Mais $\varphi'(x) - F'(x)$ est la dérivée de la fonction $\varphi(x) - F(x)$; puisque cette dérivée est constamment nulle, la fonction est constante; donc

$$\varphi(x) - F(x) = C.$$

Nous avons dit (n° 133) que, lorsqu'on a trouvé une fonction primitive $F(x)$ de la fonction proposée, et que l'on y ajoute une constante arbitraire, on obtient une nouvelle fonction primitive $F(x) + C$. Il résulte de ce qui précède que l'on forme ainsi toutes les fonctions primitives de la fonc-

tion proposée, puisque toute autre fonction primitive ne diffère de la première que par une constante. Cette fonction primitive $F(x)+C$, renfermant une constante arbitraire, s'appelle, pour cette raison, fonction primitive *générale* de la fonction proposée.

On peut déterminer la constante de manière que la fonction primitive ait une valeur donnée A pour une valeur donnée a de x; on posera

$$F(a)+C=A,$$

d'où

$$C=A-F(a).$$

Si l'on veut, par exemple, que la fonction primitive s'annule pour $x=a$, on posera

$$F(a)+C=o;$$

d'où

$$C=-F(a),$$

et la fonction primitive devient $F(x)-F(a)$.

La représentation géométrique de la fonction primitive montre bien que cette fonction renferme une constante arbitraire; car on peut compter l'aire à partir d'une ordonnée initiale AB quelconque (n° 133), et quand on change la position de cette ordonnée initiale, on modifie évidemment l'aire d'une quantité constante. Déterminer la constante de manière que la fonction primitive s'annule pour $x=a$, c'est compter l'aire à partir de l'ordonnée initiale qui correspond à $x=a$.

135. La recherche des fonctions primitives est une opération très-compliquée; nous nous bornerons aux cas les plus simples. Considérons d'abord une fonction entière

$$A_0x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\dots\dots+A_{m-1}x+A_m;$$

sa fonction primitive est

$$\frac{A_0 x^{m+1}}{m+1} + \frac{A_1 x^m}{m} + \frac{A_2 x^{m-1}}{m-1} + \ldots + \frac{A_{m-1} x^2}{2} + A_m x + C,$$

car, en prenant la dérivée de ce polynôme, on retrouve le polynôme proposé. Ainsi, *pour avoir la fonction primitive d'une fonction entière, on augmente tous les exposants d'une unité, et on divise chaque terme par l'exposant ainsi augmenté.* Cette opération élève le degré d'une unité.

Par exemple, le polynôme

$$x^2 - 5x + 7$$

a pour fonction primitive générale

$$\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 7x + C.$$

Si l'on veut que la fonction primitive s'annule pour $x = 0$, on fera $C = 0$.

La même règle s'applique aux exposants quelconques.

Exemples

1° $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}.$

$F(x) = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C.$

2° $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}.$

$F(x) = -x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C.$

3° $f(x) = -\frac{2}{3} a x^{-\frac{5}{3}} + \frac{4}{3} b x^{-\frac{7}{3}} - 2 d x^{-3}.$

$F(x) = a x^{-\frac{2}{3}} - b x^{-\frac{4}{3}} + d x^{-2} + C.$

Voici encore d'autres cas où l'on peut trouver immédiatement la fonction primitive :

1° $f(x) = \frac{1}{x}$, $F(x) = Lx + C$,

2° $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $F(x) = \text{arc tang}\, x + C$,

3° $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $F(x) = \text{arc sin}\, x + C$,

4° $f(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, $F(x) = \text{arc cos}\, x + C$,

5° $f(x) = e^x$, $F(x) = e^x + C$,

6° $f(x) = a^x$, $F(x) = \frac{a^x}{La} + C$,

7° $f(x) = \cos x$, $F(x) = \sin x + C$,

8° $f(x) = \sin x$, $F(x) = -\cos x + C$,

9° $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $F(x) = \text{tang}\, x + C$,

10° $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$, $F(x) = -\cot x + C$,

11° $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$, $F(x) = \text{séc}\, x + C$,

12° $f(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$, $F(x) = -\text{coséc}\, x + C$.

Souvent le théorème sur les fonctions de fonctions permet de trouver la fonction positive.

1° $f(x) = \frac{1}{x+a}$, $F(x) = L(x+a) + C$,

2° $f(x) = \frac{1}{(x+a)^m} = (x+a)^{-m}$, $F(x) = \frac{-1}{(m-1)(x-a)^{m-1}} + C$,

3° $f(x) = \frac{1}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \frac{\frac{1}{a}}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}$, $F(x) = \frac{1}{a}\,\text{arc tang}\,\frac{x}{a} + C$,

4° $f(x)=\frac{x}{a^2+x^2}=\frac{1}{2}\frac{2x}{a^2+x^2}$, $F(x)=\frac{1}{2}L(a^2+x^2)+C$.

On voit ici que, le numérateur $2x$ étant la dérivée du dénominateur a^2+x^2, la fonction $\frac{2x}{a^2+x^2}$ est la dérivée de $L(a^2+x^2)$.

5° $f(x)=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$, $F(x)=\sqrt{a^2+x^2}+C$,

6° $f(x)=e^{ax}$, $F(x)=\frac{e^{ax}}{a}+C$,

7° $f(x)=\cos ax$, $F(x)=\frac{\sin ax}{a}+C$,

8° $f(x)=\frac{Lx}{x}$, $F(x)=\frac{1}{2}(Lx)^2+C$,

9° $f(x)=\frac{1}{xLx}$, $F(x)=LLx+C$,

10° $f(x)=\frac{1}{x(Lx)^m}$, $F(x)=\frac{-1}{(m-1)(Lx)^{m-1}}+C$,

11° $f(x)=\frac{e^x}{1+e^{2x}}$, $F(x)=\operatorname{arc\,tang}(e^x)+C$.

CHAPITRE V.

DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS EN SÉRIES.

136. Nous avons effectué (n° **101**) le développement de $f(x_0+h)$ suivant les puissances entières et croissantes de h, quand la fonction est entière, et nous avons trouvé

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)\frac{h}{1}+f''(x_0)\frac{h^2}{1.2}+\dots\dots$$
$$+f(x_0)\frac{h^m}{1.2\dots\dots m},$$

m étant le degré de la fonction. Le développement s'arrête à la dérivée d'ordre m; les dérivées suivantes sont nulles. La même forme de développement s'applique à une fonction continue quelconque; mais alors la suite se prolonge indéfiniment et constitue une série.

Supposons que la fonction $f(x)$ reste finie et continue, ainsi que ses $n+1$ premières dérivées, quand x varie de x_0 à x_0+h. Considérons le polynôme

$$f(x_0)+f'(x_0)\frac{h}{1}+f''(x_0)\frac{h^2}{1.2}+\dots\dots+f^n(x_0)\frac{h^n}{1.2\dots\dots n},$$

du degré n par rapport à h, et représentons par

$$\frac{h^{n+1}}{1.2\dots\dots(n+1)}\,\mathrm{R}$$

la différence qui existe entre $f(x_0+h)$ et ce polynôme, nous aurons

$$(1)\quad f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)\frac{h}{1}+f''(x_0)\frac{h^2}{1.2}+\dots\dots$$
$$\dots\dots+f^n(x_0)\frac{h^n}{1.2\dots\dots n}+\frac{h^{n+1}}{1.2\dots\dots(n+1)}\mathrm{R}.$$

Si l'on pose $x_1=x_0+h$, d'où $x_1-x_0=h$, et si l'on fait passer tous les termes dans le premier nombre, on écrira

$$(2)\quad f(x_1)-f(x_0)-\frac{x_1-x_0}{1}f'(x_0)-\frac{(x_1-x_0)^2}{1.2}f''(x_0)-\dots\dots$$
$$\dots\dots-\frac{(x_1-x_0)^n}{1.2\dots\dots n}f^n(x_0)-\frac{(x_1-x_0)^{n+1}}{1.2\dots\dots(n+1)}\mathrm{R}=0.$$

La quantité inconnue R dépend des deux quantités x_0 et x_1.

Considérons la fonction

$$(3)\quad \varphi(x)=f(x_1)-f(x)-\frac{(x_1-x)}{1}f'(x)-\frac{(x_1-x)^2}{1.2}f''(x)-\ldots\ldots-\frac{(x_1-x)^n}{1.2\ldots\ldots n}f^n(x)-\frac{(x_1-x)^{n+1}}{1.2\ldots\ldots(n+1)}\mathrm{R}.$$

Pour former cette fonction nous avons remplacé x_0 par la variable x dans l'expression (2), excepté dans la quantité R que nous laissons constante. Pour abréger, nous désignerons cette fonction par $\varphi(x)$; si l'on en prend la dérivée, on remarque que les termes se détruisent deux à deux; les deux derniers termes subsistent seuls, et l'on a

$$\varphi'(x)=-\frac{(x_1-x)^n}{1.2\ldots\ldots n}f^{n+1}(x)+\frac{(x_1-x)^n}{1.2\ldots\ldots n}\mathrm{R},$$

ou plus simplement

$$(4)\qquad \varphi'(x)=\frac{(x_1-x)^n}{1.2\ldots\ldots n}[\mathrm{R}-f^{n+1}(x)].$$

D'après les hypothèses faites, la fonction $\varphi(x)$ et sa dérivée $\varphi'(x)$ restent finies et continues quand x varie de x_0 à x_1. Pour $x=x_0$, la fonction $\varphi(x)$ se réduit à l'expression (2), qui est égale à zéro; pour $x=x_1$, les deux premiers termes se détruisent, les suivants deviennent nuls, et la fonction est aussi égale à zéro. Ainsi, quand x varie de x_0 à x_1, la fonction $\varphi(x)$ part de zéro pour revenir à zéro; comme elle reste finie et continue, elle passe par un maximum en valeur absolue; la dérivée $\varphi'(x)$ change donc de signe, et comme elle reste elle-même finie et continue, elle change de signe en passant par zéro. On en conclut que la dérivée

s'annulle pour une valeur de x comprise entre x_0 et x_1, c'est-à-dire entre x_0 et $x_0 + h$; cette valeur de x, qui annule la dérivée, peut être représentée par $x_0 + \theta h$, θ étant une fraction plus petite que l'unité, et l'on a $\varphi'(x_0 + \theta h) = 0$. On en déduit, en vertu de l'équation (4),

$$R = f^{n+1}(x_0 + \theta h).$$

L'égalité (1) devient ainsi

$$(5)\quad f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)\frac{h}{1} + f''(x_0)\frac{h^2}{1.2} + \ldots\ldots + f^n(x_0)\frac{h^n}{1.2\ldots n} + \frac{h^{n+1}}{1.2\ldots n(n+1)} f^{n+1}(x_0 + \theta h).$$

Lorsque le terme complémentaire tend vers zéro quand n augmente indéfiniment, la formule donne naissance à une série convergente; c'est la série de Taylor.

137. On peut obtenir le terme complémentaire sous une forme plus générale. Si l'on représente le terme complémentaire par

$$\frac{h^{p+1}}{1.2\ldots n(p+1)} R,$$

p étant un nombre entier quelconque, on a, comme précédemment,

$$f(x_1) - f(x_0) - \frac{x_1 - x_0}{1} f'(x_0) - \frac{(x_1 - x_0)^2}{1.2} f''(x_0) - \ldots\ldots - \frac{(x_1 - x_0)^n}{1.2\ldots n} f^n(x_0) - \frac{(x_1 - x_0)^{p+1}}{1.2\ldots n(p+1)} R = 0.$$

La fonction

$$\varphi(x) = f(x_1) - f(x) - \frac{x_1 - x}{1} f'(x) - \frac{(x_1 - x)^2}{1.2} f''(x) - \ldots\ldots - \frac{(x_1 - x)^n}{1.2\ldots n} f^n(x) - \frac{(x_1 - x)^{p+1}}{1.2\ldots n(p+1)} R$$

s'annule encore pour $x = x_0$ et $x = x_1$; sa dérivée

$$\varphi'(x) = \frac{(x_1 - x)^p}{1.2\ldots n}\left[\mathrm{R} - (x_1 - x)^{n-p} f^{n+1}(x)\right]$$

s'annule par conséquent pour une valeur intermédiaire $x_0 + \theta h$; on en déduit

$$\mathrm{R} = h^{n-p}(1-\theta)^{n-p} f^{n+1}(x_0 + \theta h),$$

et par suite le terme complémentaire

$$\frac{h^{n+1}}{1.2\ldots n(p+1)}(1-\theta)^{n-p} f^{n+1}(x_0 + \theta h).$$

Le nombre entier p est arbitraire. Si l'on fait $p = n$, on retrouve la première forme; si l'on fait $p = 0$, on obtient une seconde forme

$$\frac{h^{n+1}}{1.2\ldots n}(1-\theta)^n f^{n+1}(x_0 + \theta h),$$

qui est souvent utile dans les applications *.

138. De la formule (5), dans laquelle on remplace x_0 par o et h par x, on déduit

$$(6)\qquad f(x) = f(0) + f'(0)\frac{x}{1} + f''(0)\frac{x^2}{1.2} + \ldots\ldots + f^n(0)\frac{x^n}{1.2\ldots\ldots n} + \frac{x^{n+1}}{1.2\ldots\ldots(n+1)} f^{n+1}(\theta x).$$

On peut aussi mettre le terme complémentaire sous la forme

$$\frac{x^{n+1}}{1.2\ldots\ldots n}(1-\theta)^n f^{n+1}(\theta x).$$

* Le principe de cette ingénieuse démonstration de la série de Taylor est dû à M. Homersham Cox (VIe volume du *Journal de Cambridge*); M. Rouché, professeur au lycée Charlemagne, à Paris, l'a perfectionnée d'une manière notable et lui a donné la forme simple sous laquelle nous l'avons présentée.

Lorsque le terme complémentaire tend vers zéro quand n augmente indéfiniment, la fonction est développée en série convergente, suivant les puissances entières et croissantes de x.

139. Appliquons cette formule au développement de la fonction e^x. Toutes les dérivées de cette fonction sont égales à la fonction elle-même e^x et se réduisent par conséquent à l'unité pour $x = 0$; on a donc

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots\ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots\ldots n} + \frac{x^{n+1}}{1.2\ldots\ldots(n+1)} \times e^{\theta x}.$$

La série étant convergente, quelle que soit la valeur attribuée à x, comme nous l'avons remarqué au n° 64, la fraction $\frac{x^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}$ tend vers zéro, quand n augmente indéfiniment; d'ailleurs $e^{\theta x}$ conserve une valeur finie; le terme complémentaire tend donc vers zéro, et l'on a le développement de e^x en série convergente pour toutes les valeurs de x positives ou négatives,

$$(7) \qquad e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots\ldots$$

On obtient de la même manière le développement des fonctions $\sin x$ et $\cos x$ en séries convergentes pour toutes les valeurs de x,

$$(8) \qquad \sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots\ldots$$

$$(9) \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots\ldots$$

Séries logarithmiques. *

140. Considérons encore la fonction $L(1+x)$.

On a

$$f'(x)=(1+x)^{-1},$$
$$f''(x)=-1(1+x)^{-2},$$
$$f'''(x)=1.2(1+x)^{-3},$$
$$f^{\text{iv}}(x)=-1.2.3(1+x)^{-4},$$

et la formule (6) donne

$$L(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots\mp\frac{x^n}{n}\pm\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}.$$

Le terme complémentaire est

$$\frac{1}{n+1}\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^{n+1}.$$

Lorsque la valeur de x est positive et inférieure ou égale à l'unité, le terme complémentaire qui est plus petit que $\frac{x^{n+1}}{n+1}$, tend vers zéro, quand n augmente indéfiniment, et la fonction se développe en série convergente.

Supposons maintenant que x ait une valeur négative moindre que l'unité en valeur absolue et posons $x=-x'$. Nous prendrons le terme complémentaire sous sa seconde forme

$$\frac{x'^{n+1}(1-\theta)^n}{(1-\theta x')^{n+1}}=\frac{x'^{n+1}}{1-\theta x'}\left(\frac{1-\theta}{1-\theta x'}\right)^n.$$

La fraction $\frac{1-\theta}{1-\theta x'}$ étant plus petite que l'unité et le dénominateur $1-\theta x'$ plus grand que $1-x'$, le terme complé-

mentaire est plus petit que

$$\frac{x'^{n+1}}{1-x'};$$

il tend vers zéro, quand n augmente indéfiniment. La fonction $L(1+x)$ se développe donc en série convergente

$$(10)\qquad L(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots\ldots$$

pour les valeurs de x comprises entre -1 exclusivement et $+1$ inclusivement.

Calcul des logarithmes népériens. *

141. De la série précédente, on déduit des séries qui servent au calcul des tables de logarithmes. Proposons-nous de trouver une série donnant la différence entre les logarithmes de deux nombres entiers consécutifs n et $n+1$. Puisque

$$L(n+1)-Ln=L\frac{n+1}{n}=L\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

si dans la série (10) on remplace x par la fraction $\frac{1}{n}$, on a

$$(11)\qquad L(n+1)-Ln=\frac{1}{n}-\frac{1}{2.n^2}+\frac{1}{3.n^3}-\ldots\ldots$$

Mais cette série ne converge pas assez rapidement, et il faudrait prendre un grand nombre de termes pour avoir les logarithmes avec une certaine approximation.

On arrive à une série beaucoup plus rapidement convergente de la manière suivante : Si l'on retranche l'une de

l'autre les deux séries

$$L(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots\ldots$$

$$L(1-x)=-\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\ldots\ldots,$$

les termes de degré pair se détruisent, ceux de degré impair s'ajoutent, et l'on a

$$L(1+x)-L(1-x)=L\frac{1+x}{1-x}=2\left(\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots\ldots\right).$$

Posons maintenant

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{n+1}{n},$$

d'où

$$x=\frac{1}{2n+1},$$

et remplaçons x par sa valeur, nous obtiendrons la série

$$(12)\qquad L\frac{n+1}{n}=L(n+1)-Ln$$

$$=2\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\ldots\ldots\right],$$

qui converge d'autant plus rapidement que le nombre n est plus grand.

142. C'est au moyen de la série (12) que l'on calcule les logarithmes népériens.

En faisant $n=1$ dans cette série, on a

$$L2=\frac{2}{3}+\frac{2}{3.3^3}+\frac{2}{5.3^5}+\frac{2}{7.3^7}+\ldots\ldots$$

On commencera par réduire en décimales les fractions

$\frac{2}{3}, \frac{2}{3^3}, \frac{2}{3^5}, \ldots\ldots$, en divisant successivement par 9; puis on les divisera par les nombres impairs 1, 3, 5, 7, ... Les dix premiers termes donnent, avec dix décimales exactes,

$$L2 = 0{,}6931471806.$$

Si dans la série (12) on fait $n = 2$, on a

$$L3 - L2 = \frac{2}{5} + \frac{2}{5.5^3} + \frac{2}{5.5^5} + \ldots\ldots;$$

On abrége le calcul en remarquant que diviser par 25 revient à diviser par 100 et à multiplier par 4. Les sept premiers termes donnent, avec dix décimales exactes,

$$L3 = 1{,}0986122887.$$

On obtient L4 en doublant L2, d'où

$$L4 = 1{,}3862943611.$$

On calculera ensuite L5 par la série

$$L5 - L4 = \frac{2}{9} + \frac{2}{3.9^3} + \frac{2}{5.9^5} + \ldots.$$

on obtient les fractions $\frac{2}{9}, \frac{2}{9^3}, \frac{2}{9^5}, \ldots\ldots\ldots$, en divisant par 3 les fractions déjà calculées $\frac{2}{3}, \frac{2}{3^5}, \frac{2}{3^9}, \ldots\ldots$ Les cinq premiers termes donnent, avec dix décimales exactes,

$$L5 = 1{,}6094379124.$$

On obtiendra L6 en ajoutant L3 et L2. On calculera L7 par la série en faisant $n = 6$, et ainsi de suite indéfiniment.

Calcul des logarithmes vulgaires. *

143. Quand on veut calculer les logarithmes vulgaires, il faut d'abord chercher le module. Pour cela, on calcule le logarithme népérien de 2, au moyen de la série

$$L2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3.3^3} + \frac{2}{5.3^5} + \frac{2}{7.3^7} + \ldots\ldots,$$

comme nous l'avons expliqué dans le numéro précédent, ce qui donne

$$L2 = 0{,}69314\,71806.$$

En doublant ce logarithme, on obtient le logarithme népérien de 4,

$$L4 = 1{,}38629\,43611.$$

On détermine ensuite le logarithme népérien de 5 au moyen de la série

$$L5 - L4 = \frac{2}{9} + \frac{2}{3.9^3} + \frac{2}{5.9^5} + \ldots\ldots$$

en remarquant que ces nouvelles fractions se déduisent de celles qui ont servi au calcul de L2, comme nous l'avons expliqué.

Une fois qu'on a trouvé L2 et L5, l'addition de ces deux logarithmes donne

$$L10 = 2{,}30258\,50930.$$

On sait que le module M des logarithmes vulgaires est égal à $\frac{1}{L10}$ (n° 91); divisant 1 par L10, on aura la valeur de ce module

$$M = 0{,}43429\,44819.$$

En le doublant, on a

$$2M = 0,86858\ 89638.$$

On obtient les logarithmes vulgaires en multipliant par le module les logarithmes népériens. La série (12) devient ainsi

(13)
$$\log(n+1) - \log n$$
$$= 2M\left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \ldots\ldots\right].$$

C'est cette série que l'on emploiera pour calculer les logarithmes vulgaires, en séparant les termes et l'écrivant sous la forme

$$\log(n+1) - \log n = \frac{2M}{2n+1} + \frac{2M}{3(2n+1)^3} + \frac{2M}{5(2n+1)^5} + \ldots\ldots$$

On obtiendra le logarithme vulgaire de 2, en multipliant par M le logarithme népérien de 2 qui a servi à trouver le module. On calculera log 3 par la série

$$\log 3 - \log 2 = \frac{2M}{5} + \frac{2M}{3.5^3} + \frac{2M}{5.5^5} + \ldots\ldots$$

On calculera d'abord les fractions $\frac{2M}{5}, \frac{2M}{5^3}, \frac{2M}{5^5}, \ldots\ldots$ en divisant successivement par 25, plus simplement en multipliant par 4 et divisant par 100 ; on divisera ces fractions respectivement par 1, 3, 5...... ; en ajoutant les résultats, on aura log 3. On aura log 4 en doublant log 2. On obtiendra log 5, et en multipliant par M le logarithme népérien de 5 qui a servi à trouver le module. On trouvera log 6 en ajoutant log 2 et log 3. On calculera log 7 par la série

$$\log 7 - \log 6 = \frac{2M}{13} + \frac{2M}{3.13^3} + \frac{2M}{5.13^5} + \ldots\ldots$$

On aura log 8 en ajoutant log 4 et log 2, log 9 en doublant log 3 ; on sait d'ailleurs que log $10 = 1$. On calculera log 11 par la série, et ainsi de suite indéfiniment.

La série (13) convergeant de plus en plus rapidement à mesure que l'on s'élève dans l'échelle des nombres entiers, les calculs deviendront bientôt très-simples. On aura, par exemple, le logarithme de 101 avec huit décimales exactes au moyen de deux termes seulement

$$\log 101 - 2 = \frac{2M}{201} + \frac{2M}{3.201^3}.$$

On calculera d'abord le premier terme en divisant le nombre connu 2M par 201 ; puis on déduira le second terme du premier en divisant celui-ci par 3.201^2 ou par 121203.

Le premier terme de la série suffira pour le logarithme de 1001,

$$\log 1001 - 3 = \frac{2M}{2001},$$

et à plus forte raison au delà.

144. C'est ainsi que l'on procède pour calculer les tables des logarithmes des nombres entiers ; les petites tables de Lalande contiennent les logarithmes des nombres entiers de 1 à 10000, avec cinq décimales ; celles de Callet les logarithmes des nombres entiers de 1 à 100000, avec sept décimales. Pour avoir le logarithme d'un nombre fractionnaire $n + \alpha$, compris soit entre 1000 et 10000, soit entre 10000 et 100000, on cherche dans les tables le logarithme de la partie entière n, et on y ajoute la différence tabulaire $\log(n+1) - \log n$ multipliée par la fraction α (1re partie, n° 216). Évaluons l'erreur commise :

En vertu de la série (10) on a

$$\log(n+\alpha)-\log n=\log\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)=\mathrm{M}\left(\frac{\alpha}{n}-\frac{\alpha^2}{2n^2}+\frac{\theta\alpha^3}{3n^3}\right),$$

$$\log(n+1)-\log n=\log\left(1+\frac{1}{n}\right)=\mathrm{M}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{\theta_1}{3n^3}\right),$$

θ et θ_1 étant des nombres positifs plus petits que l'unité.

L'erreur commise est

$$\log\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)-\alpha\log\left(1+\frac{1}{n}\right)=\mathrm{M}\left[\frac{\alpha(1-\alpha)}{2n^2}+\frac{\theta\alpha^3}{3n^3}-\frac{\theta_1\alpha}{3n^3}\right];$$

le produit $\alpha\,(1-\alpha)$ de deux facteurs variables dont la somme est constante, acquiert sa plus grande valeur $\frac{1}{4}$ pour $\alpha=\frac{1}{2}$, le premier terme de la parenthèse est donc plus petit que $\frac{1}{8n^2}$; les termes suivants sont de signes contraires et moindres chacun que $\frac{1}{3n^3}$: donc l'erreur commise est moindre que $\mathrm{M}\left(\frac{1}{8n^2}+\frac{1}{3n^3}\right)$, et par conséquent moindre que $\frac{1}{16n^2}+\frac{1}{6n^3}$, puisque le module est plus petit que $\frac{1}{2}$. Si l'on opère avec les tables de Lalande, comme n est égal ou supérieur à 1000, l'erreur est moindre que $\frac{1}{10^7}$; si l'on opère avec les tables de Callet, n étant égal ou supérieur à 10000, l'erreur est moindre que $\frac{1}{10^9}$. Ainsi l'erreur commise par l'emploi de la proportion, n'altère pas, d'une part les cinq premiers chiffres décimaux, d'autre part les sept premiers.

LIVRE VI.

THÉORIE DES ÉQUATIONS.

CHAPITRE PREMIER.

CALCUL DES QUANTITÉS IMAGINAIRES.

Définition.

145. Nous avons expliqué, dans la première partie de l'*Algèbre* (livre III, chap. II), comment la résolution de l'équation du second degré conduit à des expressions de la forme $a + b\sqrt{-1}$, auxquelles on a donné le nom de ***quantités imaginaires***. Si l'on représente par la lettre i le symbole $\sqrt{-1}$, les quantités imaginaires s'écriront sous la forme $a + bi$, les lettres a et b désignant des quantités réelles, positives ou négatives.

Soit r un nombre positif, α un angle, on peut toujours poser

$$a = r\cos\alpha, \qquad b = r\sin\alpha.$$

En ajoutant les carrés, on en déduit

$$(1) \qquad r = \sqrt{a^2 + b^2},$$

et par suite

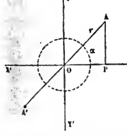
$$(2) \qquad \cos\alpha = \frac{a}{r}, \quad \sin\alpha = \frac{b}{r}.$$

De cette manière la quantité imaginaire $a + bi$ se met sous la forme

$$r(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Le nombre positif r s'appelle le *module*, l'angle α l'*argument* de la quantité imaginaire. Le module r donné par l'équation (1) a une valeur parfaitement déterminée. Mais l'argument α peut recevoir une infinité de valeurs. L'angle α étant donné par son sinus et son cosinus, d'après les équations (2), a une valeur et une seule de o à 2π; on peut ensuite augmenter ou diminuer cet angle d'un multiple quelconque de 2π; de sorte que si l'on représente par α_0 la première valeur de α, et par k un nombre entier quelconque, positif ou négatif, toutes les valeurs de α seront comprises dans la formule $\alpha = \alpha_0 + 2k\pi$.

146. Dans un plan, marquons un point fixe O et traçons une droite fixe OX passant par ce point. On peut figurer la quantité imaginaire par une longueur OA égale à son module r portée dans une direction qui fasse avec la droite fixe OX un angle égal à son argument α. On compte l'angle α à partir de OX en tournant dans un sens convenu, par exemple, de OX vers OY. Cette



représentation des quantités imaginaires a une grande importance en mathématique. Elle permet de suivre la variation de ces grandeurs et constitue un instrument puissant pour l'étude des propriétés des fonctions.

Si l'on fait varier l'angle α de 0 à 2π, la droite OA tourne autour du point O, à partir de la position OX, et décrit tout le plan.

Les quantités réelles sont des cas particuliers des quantités imaginaires. Quand $\alpha = 0$, la quantité imaginaire $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ devient une quantité réelle positive r; elle est figurée par une longueur égale à r portée sur l'axe OX dans le sens OX. Quand $\alpha = \pi$, la quantité imaginaire devient une quantité réelle négative $-r$; elle est figurée par une longueur égale à son module r portée sur l'axe fixe, dans le sens inverse OX'.

Quand $\alpha = \frac{\pi}{2}$, la quantité imaginaire, qui se réduit à ri, est figurée par une longueur égale à r portée sur la perpendiculaire OY à l'axe OX. Quand $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, la quantité imaginaire, qui se réduit à $-ri$, est figurée par une longueur égale à r portée sur la perpendiculaire, mais dans le sens inverse OY'.

En général, quand on ajoute π à l'argument, $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$ changeant de signe, la quantité imaginaire $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ change de signe. Ainsi deux quantités imaginaires égales et de signes contraires sont figurées par deux longueurs égales OA et OA' portées en sens inverse l'un de l'autre.

Du point A abaissons une perpendiculaire AP sur l'axe X'X, on a

$$a = r\cos\alpha = \mathrm{OP}, \qquad b = r\sin\alpha = \mathrm{PA}.$$

On voit par là que la partie réelle a de la quantité imaginaire OA est égale à sa projection OP sur l'axe fixe OX et le coefficient b de i à sa projection PA sur l'axe perpendiculaire OY. Écrire la quantité imaginaire sous la forme $a+bi$ revient à remplacer la ligne droite OA par la ligne brisée OPA.

147. On estime la grandeur d'une quantité imaginaire par la longueur de la droite OA qui la représente, c'est-à-dire par le module de la quantité imaginaire. Lorsque le module est petit, on dit que la quantité imaginaire est petite. Lorsque le module devient nul, on dit que la quantité imaginaire elle-même devient nulle. Puisque le module r est égal à $\sqrt{a^2+b^2}$, pour que le module soit nul, il est nécessaire et il suffit que les deux quantités réelles a et b soient nulles séparément.

Deux quantités imaginaires sont dites égales, lorsqu'elles sont représentées par la même droite OA dans la même direction, c'est-à-dire lorsque leurs modules sont égaux et que leurs arguments sont égaux ou diffèrent d'un nombre entier de circonférences. Il est clair que si deux quantités imaginaires $a+bi$, $a'+b'i$ sont égales, on a séparément $a=a'$, $b=b'$.

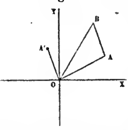
Addition.

148. On a étendu aux quantités imaginaires les règles ordinaires du calcul algébrique, comme si la lettre i désignait une quantité réelle, en convenant de remplacer ensuite dans le résultat i^2 par -1.

Proposons-nous d'abord d'additionner deux quantités imaginaires $a+bi$, $a'+b'i$. On a, en groupant les parties réelles et les parties imaginaires,

$$(a+bi)+(a'+b'i)=(a+a')+(b+b')i.$$

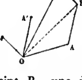
Si l'on figure les deux quantités imaginaires proposées par des grandeurs géométriques OA, OA′, comme nous l'avons expliqué, il est facile de voir que l'addition consiste à porter ces deux longueurs l'une à la suite de l'autre, chacune dans sa direction. A partir du point A, extrémité de la grandeur OA, menons une droite AB égale et parallèle à OA′, et joignons OB; la droite OB représentera la somme des deux quantités imaginaires. Car la projection de la ligne droite OB sur chacun des axes OX et OY étant égale à la somme des projections des deux parties de la ligne brisée OAB, les deux projections de la ligne OB sont égales à $a+a'$ et à $b+b'$. Cette droite figure donc la quantité imaginaire



$$(a+a')+(b+b')i.$$

Nous remarquons que dans le triangle OAB la longueur du côté OB est plus petite que la somme des deux autres côtés OA et AB, et plus grande que leur différence. Il en résulte que *le module de la somme de deux quantités imaginaires est plus petit que la somme des modules de ces deux quantités et plus grand que leur différence.*

Ce que nous venons de dire s'étend à l'addition d'un nombre quelconque de quantités imaginaires. Soit à additionner trois quantités imaginaires figurées par les grandeurs géométriques OA, OA′, OA″; à partir du point A menons une droite AB égale et parallèle à OA′, et, à partir du point B, une droite BC égale et parallèle à OA″; la



droite OB étant la somme des deux premières quantités, la droite OC sera la somme des deux quantités OB et OA″, et par conséquent la somme des trois quantités proposées. La droite OC étant moindre que la ligne brisée OABC, il est évident que *le module de la somme de plusieurs quantités imaginaires est plus petit que la somme des modules de ces quantités.*

Soustraction.

149. La soustraction n'offre aucune difficulté. D'une quantité imaginaire $a + bi$ retrancher une quantité imaginaire $a' + b'i$, c'est trouver une troisième quantité imaginaire qui, ajoutée à la seconde, reproduise la première. La différence cherchée est

$$(a - a') + (b - b')i.$$

Soient OA et OA′ les deux grandeurs géométriques qui figurent les quantités géométriques proposées. A la droite OA ajoutons une droite AB égale et parallèle à OA′, mais de sens contraire; la droite OB figurera la différence cherchée; car si à cette quantité OB on ajoute OA′ ou BA, on reproduit OA.

Multiplication.

150. En effectuant le produit de deux quantités imaginaires $a + bi$, $a' + b'i$, d'après la règle ordinaire de la multiplication des polynômes, on a

$$(a + bi)(a' + b'i) = aa' + bb'i^2 + (ab' + ba')i;$$

si l'on remplace ensuite i^2 par -1, il vient

$$(a+bi)(a'+b'i)=(aa'-bb')+(ab'+ba')i.$$

Le produit est une quantité imaginaire de la même forme que les quantités proposées. Si l'on a à effectuer le produit d'un nombre quelconque de facteurs imaginaires, on calculera le produit des deux premiers facteurs, comme nous venons de l'indiquer; on multipliera ce produit par le troisième facteur, et ainsi de suite; le produit final sera de la même forme.

Supposons les deux facteurs mis sous la forme

$$r(\cos\alpha+i\sin\alpha), \qquad r'(\cos\alpha'+i\sin\alpha');$$

le produit sera

$$rr'[(\cos\alpha\cos\alpha'-\sin\alpha\sin\alpha')+i(\sin\alpha\cos\alpha'+\cos\alpha\sin\alpha')],$$

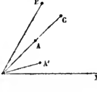
ou plus simplement

$$rr'[\cos(\alpha+\alpha')+i\sin(\alpha+\alpha')].$$

On voit que *le produit de deux quantités imaginaires est une quantité imaginaire qui a pour module le produit des modules et pour argument la somme des arguments.*

La même règle s'étend à un nombre quelconque de facteurs, et il est clair que le produit ne change pas quand on change l'ordre des facteurs.

Il est facile de donner à cette opération un sens géométrique. Multiplier la grandeur géométrique OA par la grandeur géométrique OA' revient à multiplier la longueur OA par le nombre abstrait qui mesure la longueur OA', puis à faire tourner la droite OC ainsi obtenue d'un angle COB égal à l'angle XOA'. On voit en



effet que la grandeur géométrique OB a son module égal au produit des modules et son argument égal à la somme des arguments.

Si l'on applique cette règle au produit $i \times i$, on remarque que la quantité imaginaire i est figurée par une longueur OA égale à l'unité portée sur la perpendiculaire à l'axe fixe X'X; il faut multiplier cette longueur par l'unité, puis la faire tourner d'un angle droit autour du point O, ce qui donne une longueur OB portée sur OX'; ce résultat est égal à -1. Ceci est bien d'accord avec la convention fondamentale $i^2 = -1$.

Deux quantités imaginaires $a + bi$, $a - bi$, qui ne diffèrent que par le signe de i, sont dites *conjuguées*. On a

$$(a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2.$$

Le produit de ces quantités est réel.

Il est évident que le produit de plusieurs facteurs réels et positifs ne peut devenir nul que si l'un des facteurs au moins devient nul. La même propriété a lieu quand les facteurs sont imaginaires; car le module du produit étant égal au produit des modules des facteurs, pour que ce module devienne nul, il est nécessaire et il suffit que le module de l'un des facteurs devienne nul.

Division.

151. Diviser une quantité imaginaire $a + bi$ par une quantité imaginaire $a' + b'i$, c'est chercher une quantité imaginaire $x + yi$ qui, multipliée par le diviseur, repro-

duise le dividende. On doit donc avoir

$$a + bi = (a' + b'i)(x + yi),$$

ou, en effectuant le produit,

$$a + bi = (a'x - b'y) + (b'x + a'y)i,$$

et par suite, en égalant séparément les parties réelles et les parties imaginaires,

$$a'x - b'y = a,$$
$$b'x + a'y = b.$$

On déduit de là

$$x = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2}, \qquad y = \frac{ba' - ab'}{a'^2 + b'^2}.$$

On a ainsi

$$\frac{a + bi}{a' + b'i} = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} + \frac{ba' - ab'}{a'^2 + b'^2}\, i.$$

152. On ne change pas la valeur d'une fraction $\frac{A}{B}$ formée de quantités imaginaires A et B, quand on multiplie ses deux termes par une même quantité imaginaire C; car en désignant par Q le quotient que nous venons de trouver, on a

$$A = B \times Q;$$

si l'on multiplie par C ces deux quantités égales, il vient

$$AC = B \times Q \times C = BC \times Q,$$

d'où

$$\frac{AC}{BC} = Q = \frac{A}{B}.$$

Il en résulte une manière commode d'effectuer le calcul

du quotient de deux quantités imaginaires; car si l'on multiplie les deux termes de la fraction

$$\frac{a+bi}{a'+b'i}$$

par la quantité $a - b'i$ conjuguée du dénominateur, on a

$$\frac{a+bi}{a'+b'i}=\frac{(a+bi)(a'-b'i)}{a'^2+b'^2};$$

le dénominateur devient réel et la question est ramenée à une multiplication; on retrouve ainsi le résultat obtenu précédemment

$$\frac{a+bi}{a'+b'i}=\frac{(aa'+bb')+(ba'-ab')i}{a'^2+b'^2}.$$

Quand on met les deux quantités imaginaires sous la forme $r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$, $r'(\cos\alpha'+i\sin\alpha')$, on peut écrire immédiatement le quotient de ces deux quantités

$$\frac{r}{r'}\,[\cos(\alpha-\alpha)'+i\sin(\alpha-\alpha')];$$

car, en multipliant ce quotient par le diviseur, on retrouve le dividende. Ainsi, *le quotient a pour module le quotient des modules et pour argument la différence des arguments.*

Puissances.

153. Commençons par former les puissances successives de i. On a d'abord $i^2 = -1$. La troisième puissance i^3 étant égale à la deuxième i^2 multipliée par i, il vient

$$i^3=i^2\times i=-1\times i=-i.$$

La quatrième étant égale à la troisième multipliée par i,

on a de même

$$i^4 = i^3 \times i = -i \times i = -i^2 = -(-1) = +1,$$

et ainsi de suite,

$$i^5 = i^4 \times i = i,$$
$$i^6 = i^5 \times i = i \times i = i^2 = -1.$$

On obtient de la sorte la série des puissances

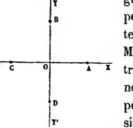
$$i^0 = +1, \quad i^1 = +i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i,$$
$$i^4 = +1, \quad i^5 = +i, \quad i^6 = -1, \quad i^7 = -i,$$
. . . .

La quatrième puissance i^4 étant égale à i^0, il est clair que les mêmes résultats se reproduisent périodiquement de quatre en quatre, et l'on a en général

$$i^{4m} = 1, \quad i^{4m+1} = i, \quad i^{4m+2} = -1, \quad i^{4m+3} = -i.$$

Les puissances paires sont réelles, les puissances impaires imaginaires.

Ces résultats sont évidents géométriquement. Les longueurs OA et OB, égales à l'unité, portées sur OX et OY, représentent la première $+1$, la seconde i. Multiplier une grandeur géométrique par i, c'est la faire tourner d'un angle droit autour du point O. En multipliant ainsi plusieurs fois successivement la grandeur OA par i, on obtient les quatre grandeurs OB, OC, OD, OA, ou $i, -1, -i, +1$, qui se reproduisent périodiquement.



154. Si, d'après la convention générale sur le calcul des

quantités imaginaires, on applique la formule du binôme au développement de $(a+bi)^m$, on a

$$(a+bi)^m = a^m + \frac{m}{1} a^{m-1}bi + \frac{m(m-1)}{1.2} a^{m-2}b^2i^2 + \ldots\ldots$$

En remplaçant les puissances successives de i par les valeurs trouvées précédemment, il vient

$$(a+bi)^m = a^m + \frac{m}{1} a^{m-1}bi - \frac{m(m-1)}{1.2} a^{m-2}b^2$$
$$- \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} a^{m-3}b^3i + \ldots\ldots;$$

les termes sont alternativement réels et imaginaires. Réunissons enfin les termes réels et les termes imaginaires, nous aurons

$$(a+bi)^m = \left[a^m - \frac{m(m-1)}{1.2} a^{m-2}b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} a^{m-4}b^4 - \ldots\right]$$
$$+ \left[ma^{m-1}b - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} a^{m-3}b^3 + \ldots\ldots\right]i.$$

Dans chaque parenthèse, les termes sont alternativement positifs et négatifs. Si l'on désigne par A et B les valeurs de ces deux parenthèses, on voit que le développement de $(a+bi)^m$ est une quantité imaginaire de la forme ordinaire $A + Bi$.

Il est clair que le développement de $(a-bi)^m$ ne diffère de celui de $(a+bi)^m$ qu'en ce que le signe de i est changé. Nous avons trouvé

$$(a+bi)^m = A + Bi;$$

on aura donc

$$(a-bi)^m = A - Bi.$$

Applications.

1° $(1+i)^5 = 1 + 5i - 10 - 10i + 5 + i = -4 \quad 4i.$

2° $(1-i)^5 = -4 + 4i.$

3° $(3+2i)^6 = 3^6 + 6.3^5.2i - 15.3^4.2^2 - 20.3^3.2^3 i + 15.3^2.2^4$
$+ 6.3.2^5 i - 2^6 = -2035 - 828i.$

4° $(3-2i)^6 = -2035 + 828i.$

155. Lorsque la quantité $a + bi$ est mise sous la forme $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, on peut écrire immédiatement

$$(a+bi)^m = r^m(\cos m\alpha + i\sin m\alpha);$$

car la puissance m^e d'une quantité est le produit de m facteurs égaux à cette quantité, et l'on sait que le module du produit est le produit des modules des facteurs et son argument la somme des arguments.

Supposons que dans un polynôme entier

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots\ldots + A_m,$$

à coefficients réels ou imaginaires, on donne à la variable x une valeur imaginaire $a + bi$. Une puissance $(a + bi)^m$, comme nous l'avons expliqué, prenant une valeur de la forme $A + Bi$, un terme quelconque du polynôme, qui est le produit d'une puissance de x par un coefficient réel ou imaginaire, prend une valeur de la même forme. En réunissant les parties réelles fournies par les différents termes du polynôme, ainsi que les parties imaginaires, on obtiendra finalement un résultat de la forme $A + Bi$.

Racines.

156. Proposons-nous d'abord d'extraire la racine carrée de la quantité $a + bi$; il s'agit de trouver une quantité de la

forme $x+yi$ qui, élevée au carré, reproduise la quantité proposée. On doit donc avoir

$$(x+yi)^2 = a+bi,$$

ou, en développant le carré,

$$(x^2-y^2)+2xyi = a+bi,$$

et par suite

$$x^2-y^2=a, \quad 2xy=b.$$

On remplacera le système de ces deux équations par le système équivalent

$$y=\frac{b}{2x}, \quad x^4-ax^2-\frac{b^2}{4}=0.$$

Les inconnues x et y devant avoir des valeurs réelles, on en déduit

$$x=\pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}},$$

$$y=\pm\frac{b}{2\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}}=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}.$$

On a ainsi

$$\sqrt{a+bi}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right).$$

On a, par exemple,

$$\sqrt{i}=\pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}.$$

157. Proposons-nous maintenant d'extraire la racine m^e

de $a+bi$, c'est-à-dire de trouver une quantité imaginaire de la même forme, qui, élevée à la puissance m, reproduise la quantité proposée. Posons

$$a+bi=\mathrm{R}(\cos\alpha+i\sin\alpha),$$

et représentons l'inconnue par $r(\cos\omega+i\sin\omega)$, on doit avoir

$$r^m(\cos m\omega+i\sin m\omega)=\mathrm{R}(\cos\alpha+i\sin\alpha).$$

Pour que ces deux quantités imaginaires soient égales, il est nécessaire que leurs modules soient égaux et que leurs arguments soient égaux ou diffèrent d'un multiple quelconque de 2π. On aura donc

$$r^m=\mathrm{R},\quad m\omega=\alpha+2k\pi,$$

d'où

$$r=\mathrm{R}^{\frac{1}{m}},\quad \omega=\frac{\alpha+2k\pi}{m},$$

et les diverses valeurs de l'inconnue sont données par la formule

$$\mathrm{R}^{\frac{1}{m}}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{m}+i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{m}\right),$$

dans laquelle la lettre k désigne un nombre entier quelconque, positif ou négatif.

158. Il est aisé de voir, d'après cette formule, que l'inconnue admet m racines distinctes. En effet, si l'on donne à k les m valeurs consécutives

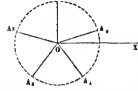
$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots\ m-1,$$

on obtient m valeurs qui ont même module $\mathrm{R}^{\frac{1}{m}}$ et pour argument les arcs

$$\frac{\alpha}{m}, \quad \frac{\alpha}{m}+\frac{2\pi}{m}, \quad \frac{\alpha}{m}+2\frac{2\pi}{m}, \quad \frac{\alpha}{m}+3\frac{2\pi}{m}, \ldots \quad \frac{\alpha}{m}+(m-1)\frac{2\pi}{m}.$$

Comme ces arguments sont plus petits que 2π et qu'ils diffèrent entre eux, les m quantités qui leur correspondent sont distinctes. Si l'on donnait à k les valeurs m, $m+1$, $m+2,\ldots$, en négligeant un multiple de 2π, on retrouverait les arguments déjà obtenus et les mêmes racines se reproduiraient dans le même ordre. Si l'on donnait à k les valeurs négatives -1, -2, $-3\ldots$, on retrouverait encore les mêmes racines, mais dans un ordre inverse. Ainsi, la racine m^e d'une quantité donnée admet m valeurs distinctes et n'en admet que m.

Du point O comme centre, avec un rayon égal à $R^{\frac{1}{m}}$, décrivons un cercle ; prenons l'angle XOA_0 égal à $\frac{\alpha}{m}$ et, à partir du point A_0, divisons la circonférence en m parties égales ; les m valeurs de la racine seront figurées par les rayons OA_0, OA_1, $OA_2\ldots$, qui vont du centre aux différents points ou divisions de la circonférence. Ces m quantités forment une étoile régulière à m rayons.



L'extraction de la racine revient à la résolution de l'équation binôme $x^m = A$. Nous étudierons avec plus de détails en trigonométrie les propriétés des racines de cette équation.

CHAPITRE II.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES.

Étude des fonctions entières.

Nous nous sommes déjà occupé des fonctions entières au chapitre des dérivées ; nous avons dit qu'une fonction entière de x varie d'une manière continue avec x (nos 96 et 100) ; à cause de l'importance du sujet, nous allons reprendre en détail l'étude des fonctions entières.

159. Théorème I. ***Quand un polynôme entier, à coefficients réels, ne contient pas de terme constant, on peut donner à la variable une valeur absolue assez petite, pour que la somme des valeurs absolues de tous les termes du polynôme soit plus petite que toute quantité donnée.***

Soit

$$ax + bx^2 + cx^3 + \ldots\ldots + kx^m$$

un polynôme entier en x, à coefficients réels, ne renfermant pas de terme constant, et ordonné suivant les puissances croissantes de x. Je dis qu'on peut donner à x une valeur absolue assez petite, pour que la somme y des valeurs absolues des termes soit plus petite qu'une quantité donnée positive α, si petite qu'elle soit. En effet, si l'on désigne par M le plus grand coefficient en valeur absolue, on a évidemment

$$y < M(x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots);$$

on peut aussi prolonger la série à l'infini, en supposant x inférieur à l'unité, afin de rendre la série convergente.

Faisons la somme des termes, il vient

$$y < \frac{Mx}{1-x}.$$

L'inégalité sera satisfaite si l'on rend le second membre plus petit que α; posons donc

$$\frac{Mx}{1-x} < \alpha,$$

d'où

$$x < \frac{\alpha}{M+\alpha}.$$

Ainsi, pour toutes les valeurs absolues de x inférieures à $\frac{\alpha}{M+\alpha}$, la somme des valeurs absolues des termes du polynôme est moindre que α. Il en résulte que pour toutes les valeurs de x comprises entre $-\frac{\alpha}{M+\alpha}$ et $+\frac{\alpha}{M+\alpha}$, la valeur du polynôme sera comprise entre $-\alpha$ et $+\alpha$.

Par exemple, la somme des valeurs absolues des termes du polynôme

$$2x - 3x^2 + 7x^3 + 9x^4 - 4x^5$$

sera moindre que $\frac{1}{10}$, quand la valeur absolue de x sera moindre que $\frac{1}{91}$, et par conséquent la valeur même du polynôme sera comprise entre $-0,1$ et $+0,1$ quand la variable x sera comprise entre $-\frac{1}{91}$ et $+\frac{1}{91}$, ou plus simplement entre $-0,01$ et $+0,01$.

160. THÉORÈME II. *Quand un polynôme entier, à coefficients réels, est ordonné par rapport aux puissances crois-*

santes de x, *on peut donner à la variable une valeur absolue assez petite, pour que le premier terme ait une valeur absolue plus grande que la somme des valeurs absolues de tous les autres, et par conséquent donne son signe au polynôme.*

Soit

$$ax^n + bx^{n+1} + cx^{n+2} + \dots\dots$$

le polynôme proposé; mettons-le sous la forme

$$x^n(a + bx + cx^2 + \dots\dots).$$

Nous venons de démontrer que l'on peut donner à x une valeur absolue assez petite pour que la somme des valeurs absolues des termes du polynôme

$$bx + cx^2 + \dots\dots$$

soit inférieure à la valeur absolue de a. La valeur absolue du premier terme du polynôme proposé sera alors plus grande que la somme des valeurs absolues de tous les autres. Pour ces valeurs de x, le premier terme donnera évidemment son signe au polynôme.

Par exemple, la valeur absolue du premier terme du polynôme

$$2x - 3x^2 + 7x^3 + 9x^4 - 4x^5$$

sera plus grande que la somme des valeurs absolues de tous les autres pour les valeurs de x comprises entre $-\frac{2}{11}$ et $+\frac{2}{11}$.

161. Théorème III. *Quand un polynôme entier, à coefficients réels, est ordonné par rapport aux puissances décroissantes de* x, *on peut donner à* x *une valeur absolue assez grande, pour que le premier terme ait une valeur ab-*

solue plus grande que la somme des valeurs absolues de tous les autres, et, par conséquent, donne son signe au polynôme.

Soit le polynôme

$$ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \ldots\ldots$$

Mettant x^m en facteur, je l'écris sous la forme

$$x^m\left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \ldots\ldots\right).$$

Le polynôme entre parenthèse est ordonné par rapport aux puissances croissantes de la variable $\frac{1}{x}$; en vertu du théorème I, on peut rendre la valeur absolue de $\frac{1}{x}$ assez petite, c'est-à-dire la valeur absolue de x assez grande, pour que la somme des valeurs absolues des termes du polynôme

$$\frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \ldots\ldots$$

soit moindre que la valeur absolue de a. Le premier terme ax^m du polynôme aura alors une valeur absolue plus grande que la somme des valeurs absolues de tous les autres termes, et par conséquent donnera son signe au polynôme.

Par exemple, le premier terme du polynôme

$$2x^5 - 8x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 3x + 7$$

aura une valeur absolue plus grande que la somme des valeurs absolues de tous les autres termes pour toutes les valeurs absolues de $\frac{1}{x}$ plus petites que $\frac{2}{8+2} = \frac{1}{5}$, et par conséquent pour toutes les valeurs absolues de x plus grandes que 5.

Pour ces valeurs de x le premier terme donnera évidem-

ment son signe au polynôme; si l'on fait varier x de $+5$ à $+\infty$, le polynôme restera positif; si l'on fait varier x de -5 à $-\infty$, le polynôme restera négatif.

162. Théorème IV. *Quand la valeur absolue de* x *croît au delà de toute limite, la valeur absolue du polynôme croît aussi au delà de toute limite.*

Soit le polynôme

$$ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \ldots\ldots$$

que nous mettrons sous la forme

$$ax^m\left(1 + \frac{b}{a}\frac{1}{x} + \frac{c}{a}\frac{1}{x^2} + \ldots\ldots\right).$$

On peut donner à $\frac{1}{x}$ une valeur absolue assez petite, ou à x une valeur absolue assez grande, pour que la somme des valeurs absolues des termes du polynôme

$$\frac{b}{a}\frac{1}{x} + \frac{c}{a}\frac{1}{x^2} + \ldots\ldots$$

soit moindre qu'une quantité positive très-petite donnée α; la valeur de la parenthèse sera alors comprise entre $1-\alpha$ et $1+\alpha$; elle sera positive et plus grande que $1-\alpha$. La valeur absolue du polynôme proposé sera plus grande que la valeur absolue du premier terme ax^m multipliée par le facteur constant $1-\alpha$; si l'on fait ensuite augmenter indéfiniment la valeur absolue de x à partir de la valeur assignée, la valeur absolue du facteur ax^m croissant à l'infini et le facteur $1-\alpha$ restant fixe, la valeur absolue du produit, et à plus forte raison celle du polynôme proposé, augmente à l'infini.

163. Théorème V. — *Une fonction entière varie d'une manière continue.*

Désignons par $f(x)$ un polynôme entier à coefficients réels et supposons que l'on n'attribue à la variable x que des valeurs réelles. Si l'on donne à la variable x un accroissement h, la fonction éprouve un accroissement $f(x+h)-f(x)$, que l'on peut développer suivant les puissances croissantes de h d'après la loi du binôme (nº 101), et mettre sous la forme

$$Ah + Bh^2 + \ldots\ldots + Gh^m.$$

On peut donner à h une valeur numérique assez petite pour que ce polynôme ait une valeur absolue plus petite que toute quantité donnée. Ainsi, à un accroissement infiniment petit de la variable correspond un accroissement infiniment petit de la fonction, et, par conséquent, lorsque la variable x varie d'une manière continue, la fonction varie aussi d'une manière continue.

164. Nous avons dit que, lorsque la valeur absolue de x augmente à l'infini, la valeur absolue du polynôme augmente aussi à l'infini. Supposons, pour fixer les idées, le premier coefficient positif; lorsque x tend vers $+\infty$, le polynôme tend aussi vers $+\infty$; lorsque x tend vers $-\infty$, le polynôme tend vers $-\infty$ s'il est de degré impair, et vers $+\infty$ s'il est de degré pair. Ainsi, lorsque x croît de $-\infty$ à $+\infty$, la fonction varie d'une manière continue de $-\infty$ à $+\infty$, si m est impair; si m est pair, elle part de $+\infty$ pour revenir à $+\infty$, en variant aussi d'une manière continue. Dans l'intervalle, elle peut éprouver des alternatives de croissance et de décroissance.

Le signe de la dérivée $f'(x)$ indique si la fonction croît ou décroît; cette dérivée, étant un polynôme entier en x, conserve toujours le signe de son premier terme, quand la

valeur absolue de x dépasse une certaine limite x_1 ; x variant de x_1 à $+\infty$ ou de $-x_1$ à $-\infty$, la fonction ira constamment en croissant, ou constamment en décroissant.

165. Théorème VI. ***Lorsque deux nombres réels, substitués dans un polynôme entier, à coefficients réels, donnent des résultats de signes contraires, le polynôme a au moins une racine réelle comprise entre ces deux nombres.***

Ceci résulte de la continuité de la fonction. Soit x_0 plus petit que x_1, et supposons, par exemple, que le polynôme $f(x)$ ait une valeur négative pour $x = x_0$, une valeur positive pour $x = x_1$. Si l'on imagine que x croisse d'une manière continue de x_0 à x_1, la fonction variera d'une manière continue, allant d'une valeur négative à une valeur positive; comme elle reste finie, elle devra nécessairement dans l'intervalle passer par la valeur intermédiaire zéro. Ainsi, la fonction $f(x)$ s'annule pour une valeur de x comprise x_0 et x_1; cette valeur de x est racine de l'équation $f(x) = 0$.

Il est possible que la fonction passe plusieurs fois par zéro dans l'intervalle de x_0 à x_1; dans ce cas, l'équation admet plusieurs racines réelles entre x_0 et x_1.

Toute fonction finie et continue, dans l'intervalle considéré, jouit évidemment de la même propriété.

166. Théorème VII. ***Une équation algébrique de degré impair, à coefficients réels, a au moins une racine réelle.***

On appelle équation algébrique l'équation que l'on obtient en égalant à zéro une fonction entière $f(x)$. On peut toujours supposer le premier coefficient positif : s'il était négatif, on changerait les signes de tous les termes. Si l'on donne à x une valeur négative très-grande en valeur absolue, le polynôme prend une valeur de même signe que celle de son premier terme, c'est-à-dire une valeur négative, puisque

ce dernier terme est de degré impair. Au contraire, si l'on donne à x une valeur positive très-grande, le polynôme prend une valeur positive. Ainsi, quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$, le polynôme $f(x)$ change de signe et s'annule au moins une fois; donc l'équation $f(x)=0$ a au moins une racine réelle.

Cette racine réelle a un signe contraire à celui du dernier terme de l'équation. Supposons d'abord que le dernier terme, c'est-à-dire le terme indépendant de x, soit négatif; pour $x=0$, le polynôme, se réduisant à son dernier terme, a une valeur négative; pour une valeur très-grande positive, il a une valeur positive; donc le polynôme change de signe quand x varie de 0 à $+\infty$ et par conséquent, l'équation admet une racine positive. Supposons maintenant que le dernier terme soit positif; pour $x=-\infty$, le polynôme est négatif, pour $x=0$, il est positif; il change donc de signe quand x varie de $-\infty$ à 0 et, par conséquent, l'équation admet une racine négative.

On peut affirmer, par exemple, que l'équation

$$x^3-5x^2+4x-7=0$$

a au moins une racine réelle positive, et que l'équation

$$x^3-5x^2-4x+7=0$$

a au moins une racine réelle négative.

167. Théorème VIII. *Une équation algébrique du degré pair, à coefficients réels, dont le dernier terme est négatif, a au moins deux racines réelles.*

Pour $x=0$, le polynône, se réduisant à son dernier terme, a une valeur négative. D'ailleurs, une valeur de x très-grande, soit positive, soit négative, rend le polynôme positif, puisque son premier terme, qui est de degré pair,

reste toujours positif. Ainsi le polynôme change de signe quand x varie de o à $+\infty$, et aussi quand x varie de o à $-\infty$; donc l'équation admet au moins deux racines réelles, l'une positive, l'autre négative.

Par exemple, l'équation

$$x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 3x - 2 = 0$$

admet au moins deux racines réelles, l'une positive, l'autre négative.

Il est un cas où l'on ne sait pas si l'équation admet des racines réelles : c'est celui où l'équation, étant de degré pair, a son dernier terme positif; car, dans ce cas, le polynôme a des valeurs positives pour $x = 0$ et pour des valeurs de x très-grandes, positives ou négatives. Ainsi, on ne sait pas si l'équation

$$x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 3x + 2 = 0$$

admet des racines réelles.

168. Théorème. IX. *Si la quantité* a *est racine d'une équation algébrique, le premier membre est divisible par* $x - a$.

Soit $f(x)$ un polynôme entier du degré m, à coefficiens quelconques, réels ou imaginaires, et ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x; on peut diviser ce polynôme par $x - a$ et pousser l'opération jusqu'à ce qu'on arrive à un reste indépendant de x. Si l'on appelle $f_1(x)$ le quotient qui est un polynôme entier de $m-1$e degré, et R le reste constant, on aura

$$f(x) = (x - a) f_1(x) + R.$$

Cette égalité est vraie, quelle que soit la valeur de x. Donnons à x la valeur particulière a, le premier terme du second membre s'évanouit, puisque le facteur $x - a$ devient nul et que l'autre facteur $f_1(a)$ conserve une valeur finie;

il vient donc

$$f(a) = \mathrm{R}.$$

Ainsi, *quand on divise un polynôme entier par un binôme de la forme* x — a, *le reste de la division est le résultat que l'on obtient en remplaçant* x *par* a *dans ce polynôme.*

Supposons maintenant que a soit racine du polynôme $f(x)$; cela signifie que, si l'on remplace x par a dans le polynôme, on obtient un résultat $f(a)$ égal à zéro. Donc le reste R est nul, et l'on a

$$f(x) = (x-a)f_1(x).$$

Ainsi, *lorsque* a *est racine d'un polynôme entier, ce polynôme est divisible par* x — a.

Réciproquement, *si un polynôme est divisible par un binôme de la forme* x — a, *la quantité* a *est racine du polynôme.* En effet, dire que le polynôme $f(x)$ est divisible par $x-a$, c'est dire que le reste constant R auquel on arrive en effectuant la division est nul; donc la quantité $f(a)$ est égale à zéro et a est racine.

169. Nous indiquerons maintenant une règle très-simple pour calculer le quotient.

Soit

$$f(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots\ldots + A_{m-1}x + A_m$$

le polynôme proposé.

Divisons ce polynôme par $x-a$,

$$\begin{array}{r|l}
A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + A_3x^{m-3} \ldots + A_{m-1}x + A_m & x-a \\ \cline{2-2}
(A_0a + A_1)x^{m-1} + A_2x^{m-2} + A_3x^{m-3} \ldots\ldots\ldots + A_m & A_0x^{m-1} + B_1x^{m-2} + B_2x^{m-3} + \ldots + B_{m-1} \\
(B_1a + A_2)x^{m-2} + A_3x^{m-3} \ldots\ldots\ldots + A_m & \\
(B_2a + A_3)x^{m-3} \ldots\ldots\ldots + A_m & \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
(B_{m-2}a + A_{m-1})x + A_m & \\
\text{Reste} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad B_{m-1}a + A_m &
\end{array}$$

Le premier terme du quotient est A_0x^{m-1}; multiplions ce terme par le diviseur $x-a$, et retranchons du dividende; le produit par x détruit le premier terme du dividende, le produit par $-a$ donne la quantité A_0ax^{m-1} qui s'ajoute au second terme; ainsi le premier reste ou le second dividende a pour premier terme $(A_0a+A_1)x^{m-1}$, les termes suivants étant les mêmes que dans le dividende proposé. Si l'on divise ce premier terme par x, on aura le second terme B_1x^{m-2} du quotient, en représentant pour abréger A_0a+A_1 par B_1; multiplions ce second terme par $x-a$, le produit par x détruit le premier terme du second dividende, le produit par $-a$ donne la quantité B_1ax^{m-2} qui s'ajoute au second terme; ainsi le troisième dividende a pour premier terme $(B_1a+A_2)x^{m-2}$, les termes suivants restant les mêmes que dans le dividende proposé. Si l'on divise ce premier terme par x, on aura le troisième terme B_2x^{m-3} du quotient, en représentant B_1a+A_2 par B_2, et ainsi de suite.

Cette loi est générale : *on obtient un coefficient quelconque du quotient en multipliant le coefficient précédent par* a *et ajoutant le coefficient du terme qui dans le polynôme proposé occupe le même rang que le terme cherché du quotient.*

On arrivera ainsi au dernier dividende

$$(B_{m-2}a+A_{m-1})x+A_m,$$

qui donnera le dernier terme B_{m-1} du quotient, B_{m-1} représentant la quantité $B_{m-2}a+A_{m-1}$; en multipliant ce dernier terme par $x-a$ et retranchant du dernier dividende, on aura le reste de la division $B_{m-1}a+A_m$. On voit par là que le reste de la division se forme au moyen du dernier terme du quotient suivant la même loi, en multipliant le dernier

terme du quotient par a et ajoutant le dernier terme du dividende.

Les coefficients du quotient, formés d'après cette loi, ont pour valeurs

$$B_1 = A_0 a + A_1,$$
$$B_2 = A_0 a^2 + A_1 a + A_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$B_{m-1} = A_0 a^{m-1} + A_1 a^{m-2} + \ldots\ldots + A_{m-1},$$

et le reste de la division

$$R = B_{m-1} a + A_m = A_0 a^m + A_1 a^{m-1} + \ldots\ldots + A_m.$$

Exemples.

1° Diviser par $x - 3$ le polynôme

$$2x^5 - 8x^4 + 7x^3 - 6x^2 + 5x + 12.$$

L'application de la règle précédente donne le quotient

$$2x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x - 4.$$

Après avoir écrit le premier coefficient 2, on dira : 2 multiplié par 3..... 6 et -8..... -2 ; -2 multiplié par 3..... -6 et $+7$..... $+1$; $+1$ multiplié par 3..... $+3$ et -6.....-3 ; -3 multiplié par 3.....-9 et $+5$.....-4. Si l'on multiplie le dernier terme du quotient par 3 et que l'on ajoute le dernier terme $+12$ du dividende, on trouve le reste 0 ; donc 3 est racine du polynôme.

2° Diviser par $x + 2$ le polynôme

$$2x^4 + x^3 - 10x^2 - 2x + 5.$$

En opérant de la même manière, on trouve le quotient

$$2x^3 - 3x^2 - 4x + 6.$$

Ici $a=-2$; on dira donc : 2 multiplié par $-2.....-4$ et $+1.....-3$; -3 multiplié par $-2.....+6$ et $-10.....-4$; -4 multiplié par $-2.....+8$ et $-2.....+6$. En multipliant le dernier terme du quotient par -2 et ajoutant $+5$, on obtient le reste -7 de la division. Donc -2 n'est pas racine.

3° Diviser par $x-2$ le polynôme

$$x^8-13x^6+7x^4+13x^2+2x-8.$$

Le polynôme n'est pas complet; il ne contient pas de formes en x^7, en x^6 et en x^3; on imaginera le polynôme complété au moyen de coefficients nuls et écrit sous la forme

$$x^8+0x^7+0x^6-13x^5+7x^4+0x^3+13x^2+2x-8;$$

puis on appliquera la règle ordinaire. Le quotient est

$$x^7+2x^6+4x^5-5x^4-3x^3-6x^2+x+4$$

et le reste nul. Donc 2 est racine.

170. Théorème X. *Tout polynôme entier du degré* m, *à coefficients réels ou imaginaires, peut être décomposé en un produit de* m *facteurs du premier degré.*

On démontre directement qu'un polynôme entier du degré m a m racines, réelles ou imaginaires; nous admettrons pour le moment ce théorème fondamental, renvoyant la démonstration à la fin du volume. On en déduit la décomposition du polynôme en m facteurs du premier degré. Mais nous ne nous servirons dans la démonstration que d'une partie du théorème, savoir qu'un polynôme entier a au moins une racine.

Désignons par $f(x)$ un polynôme entier du degré m, et appelons a une racine, réelle ou imaginaire; le polynôme

$f(x)$ est divisible par $x-a$; en appelant $f_1(x)$ le quotient, qui est un polynôme entier du degré $m-1$, on a

$$f(x)=(x-a)f_1(x).$$

Appelons de même b une racine du polynôme $f_1(x)$; ce polynôme sera divisible par $x-b$, et l'on aura

$$f_1(x)=(x-b)f_2(x),$$

le quotient $f_2(x)$ étant un polynôme entier du degré $m-2$. Appelons c une racine du polynôme $f_2(x)$; ce polynôme sera divisible par $x-c$, et l'on aura

$$f_2(x)=(x-c)f_3(x),$$

le quotient $f_3(x)$ étant un polynôme du degré $m-3$. En continuant de la même manière, on arrivera à un polynôme $f_{m-1}(x)$ du premier degré, qui admet une racine k, et s'écrit

$$f_{m-1}(x)=\mathrm{A}(x-k),$$

le dernier quotient A étant indépendant de x. Si l'on multiplie entre elles toutes ces égalités, les polynômes intermédiaires disparaissent, et l'on a

$$f(x)=\mathrm{A}(x-a)(x-b)(x-c)\,.\,.\,.\,.\,.\,(x-k).$$

Ainsi tout polynôme entier du degré m peut être décomposé en un produit de m facteurs du premier degré.

Si, dans le polynôme, on remplace x par l'une des valeurs $a, b, c, \ldots\ldots k$, l'un des facteurs du produit devenant nul, le produit lui-même devient nul; ainsi l'équation $f(x)=0$ du degré m admet les m racines $a, b, c, \ldots\ldots k$. Elle n'en admet pas d'autres; car, si l'on attribue à x une valeur différente de chacune des quantités $a, b, c, \ldots\ldots k$,

chacun des facteurs du produit étant différent de zéro, le produit lui-même est différent de zéro.

171. Remarque. Il peut arriver que, parmi les m quantités a, b, c,.....k, plusieurs soient égales entre elles; dans ce cas on dit que l'équation admet des ***racines égales***. Supposons, par exemple, que les deux quantités a et b soient égales entre elles; le polynôme contiendra le facteur $(x-a)^2$, et l'on dira que la racine a est une ***racine double***. De même si les trois quantités a, b, c, sont égales entre elles, le polynôme contiendra le facteur $(x-a)^3$ et la racine a sera une ***racine triple***. En général, si parmi les quantités a, b, c,.....k, il y en a n égales entre elles, le polynôme contient un facteur de la forme $(x-a)^n$, et l'on dit que la racine a est du degré n de multiplicité.

L'équation peut admettre plusieurs racines ***multiples***, par exemple une racine a du degré n de multiplicité, une racine b du degré p, une racine c du degré q, etc., et l'on a, d'une manière générale,

$$f(x) = A(x-a)^n(x-b^p(x-c)^q \ldots\ldots$$

Les facteurs $x-a$, $x-b$,....., qui composent le polynôme proposé, sont les facteurs premiers de ce polynôme; la somme $n+p+q+\ldots..$ des exposants des facteurs premiers est égale au degré m du polynôme.

172. Théorème XI. *Un polynôme entier ne peut être décomposé qu'en un seul système de facteurs premiers.*

Supposons, en effet, que l'on ait

$$f(x) = A(x-a)^n(x-b)^p(x-c)^q \ldots\ldots,$$
$$f(x) = A'(x-a')^{n'}(x-b')^{p'}(x-c')^{q'} \ldots\ldots,$$

pour toutes les valeurs de x; donnons à x la valeur particulière a; le premier produit contenant le facteur $x-a$, s'an-

nule; le second, qui est égal au premier, doit s'annuler aussi; pour cela il est nécessaire que l'un des facteurs s'annule, et par conséquent soit égal à $x-a$. Ainsi les facteurs premiers sont les mêmes de part et d'autre. Je dis maintenant que les exposants sont respectivement égaux. Supposons, par exemple, que les exposants n et n' du facteur $x-a$ ne soient pas égaux et que n soit plus grand que n'; si l'on divise les deux produits égaux par $(x-a)^{n'}$, on aura deux quotients égaux

$$A(x-a)^{n-n'}(x-b)^p(x-c)^q \ldots\ldots,$$
$$A'(x-b)^{p'}(x-c)^{q'} \ldots\ldots,$$

le premier contenant le facteur $x-a$, le second ne le contenant pas, ce qui est impossible. Enfin, si l'on donne à x une valeur différente des racines, les deux produits devant être égaux, il est nécessaire que les coefficients A et A' soient égaux.

173. Théorème XII. *Deux nombres réels* x_0 *et* x_1, *mis à la place de* x *dans un polynôme entier* f(x) *à coefficients réels, donnent des résultats de même signe ou de signes contraires, suivant que ces deux nombres comprennent un nombre pair ou un nombre impair de racines réelles du polynôme.*

Désignons par a, b,....., e les diverses racines réelles comprises entre x_0 et x_1; le polynôme entier $f(x)$ est divisible par le produit $(x-a)$ $(x-b)$..... $(x-e)$ des facteurs binômes qui correspondent à ces racines; appelons $\varphi(x)$ le polynôme quotient, on a

$$f(x)=(x-a)(x-b)\ldots\ldots(x-e)\times\varphi(x).$$

Le dividende et le diviseur ayant leurs coefficients réels, il est clair que le polynôme quotient $\varphi(x)$ a aussi ses coefficients réels. Si l'on remplace x successivement par x_0 et

x_1, on a

$$f(x_0) = (x_0 - a)(x_0 - b) \ldots\ldots (x_0 - e)\varphi(x_0),$$
$$f(x_1) = (x_1 - a)(x_1 - b) \ldots\ldots (x_1 - e)\varphi(x_1).$$

Nous remarquerons d'abord que $\varphi(x_0)$ et $\varphi(x_1)$ sont des quantités de même signe; autrement les deux nombres x_0 et x_1 comprendraient encore une autre racine du polynôme $\varphi(x)$ et par conséquent du polynôme $f(x)$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Supposons x_0 plus petit que x_1: le nombre x_1 étant plus grand que les racines $a, b, \ldots\ldots, e$, chacun des facteurs $x_1 - a, x_1 - b, \ldots\ldots, x_1 - e$, est positif; donc $f(x_1)$ a le signe de $\varphi(x_1)$. Le nombre x_0 étant plus petit que les racines $a, b, \ldots\ldots e$, chacun des facteurs $x_0 - a, x_0 - b, \ldots\ldots, x_0 - e$, est négatif. Si le nombre de ces facteurs est pair, $f(x_0)$ aura le même signe que $\varphi(x_0)$, et, par conséquent, que $f(x_1)$; si le nombre des facteurs est impair, $f(x_0)$ aura un signe contraire à celui de $\varphi(x_0)$, et par conséquent contraire à celui de $f(x_1)$. Ainsi les deux résultats $f(x_0)$ et $f(x_1)$ ont le même signe ou des signes contraires, selon que le nombre des racines réelles comprises entre x_0 et x_1 est pair ou impair.

Rien n'empêche de supposer que plusieurs des facteurs binômes $x-a, x-b, x-c, \ldots\ldots$, soient égaux entre eux; alors il y aura des racines multiples et le théorème subsistera toujours, pourvu que, dans l'évaluation du nombre des racines comprises entre x_0 et x_1, on tienne compte du degré de multiplicité de chaque racine.

Les réciproques sont vraies : 1° lorsque deux nombres x_0 et x_1, mis à la place de x dans le polynôme $f(x)$, donnent des résultats de même signe, ces deux nombres ne comprennent aucune racine réelle ou en comprennent un nombre pair; car si elles en comprenaient un nombre im-

pair, les résultats seraient de signes contraires. 2° Lorsque deux nombres donnent des résultats de signes contraires, ces deux nombres comprennent un nombre impair de racines réelles; car s'ils n'en comprenaient pas, ou s'ils en comprenaient un nombre pair, les résultats seraient de même signe. Ceci complète le théorème VI.

174. Corollaire. Quand x, variant d'une manière continue, passe par une racine réelle a, le polynôme s'annule, mais il ne change pas toujours de signe. Nous pouvons supposer la quantité h assez petite pour que l'intervalle de $a-h$ à $a+h$ ne comprenne aucune racine autre que a. En vertu du théorème précédent, les deux résultats $f(a-h)$ et $f(a+h)$ seront de même signe, si la racine a est d'un degré pair de multiplicité, de signes contraires si la racine est de degré impair. Ainsi, *le polynôme change de signe quand* x *passe par une racine simple ou d'un degré impair de multiplicité; il ne change pas de signe quand* x *passe par une racine d'un degré pair de multiplicité.*

Il est facile de démontrer directement cette proposition. Soit n le degré de multiplicité de la racine a; on a

$$f(x)=(x-a)^n\varphi(x),$$

si l'on remplace x successivement par $a-h$ et par $a+h$, il vient

$$f(a-h)=(-h)^n\varphi(a-h),$$
$$f(a+h)=h^n\varphi(a+h).$$

Les quantités $\varphi(a-h)$ et $\varphi(a+h)$ ayant le même signe, les quantités $f(a-h)$ et $f(a+h)$ auront le même signe si n est pair, des signes contraires si n est impair.

Relations entre les coefficients d'une équation algébrique et les racines.

175. Supposons que l'on ait divisé tous les termes de l'équation par le premier coefficient, afin de la ramener à la forme

$$x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots\ldots + A_m = 0.$$

Cette équation a m racines $a, b, c, \ldots\ldots, k$, et nous avons démontré que le premier membre $f(x)$ peut être décomposé en un produit de m facteurs premiers

$$(x-a)(x-b)(x-c)\ldots\ldots(x-k).$$

Si l'on effectue ce produit, il est clair que l'on reproduira identiquement le polynôme proposé. Or si l'on appelle S_1 la somme des racines, S_2 la somme des produits des racines deux à deux, S_3 la somme des produits trois à trois,....., le produit des m facteurs premiers, d'après la formule établie au n° 33, se développera de la manière suivante :

$$x^m - S_1x^{m-1} + S_2x^{m-2} - S_3x^{m-3} + \ldots\ldots \pm S_m.$$

En égalant les coefficients des deux polynômes, on a donc

$$A_1 = -S_1,\quad A_2 = +S_2,\quad A_3 = -S_3, \ldots\ldots$$

On en conclut :

Théorème XIII. *Quand le premier coefficient de l'équation est l'unité, 1° la somme des racines égale le second coefficient changé de signe; 2° la somme des produits des racines deux à deux égale le troisième coefficient; 3° la somme des produits des racines trois à trois égale le quatrième coefficient changé de signe, et ainsi de suite. Enfin le produit des racines égale le*

dernier terme pris avec son signe ou un signe contraire, suivant que m *est pair ou impair.*

Exemples.

1° Nous avons déjà reconnu ces relations dans l'équation du second degré (1re partie, n° 145). Si l'on appelle a, b, c les trois racines d'une équation du troisième degré

$$x^3 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3 = 0,$$

on a

$$a + b + c = -A_1, \quad ab + ac + bc = A_2, \quad abc = -A_3.$$

2° Résoudre une équation du troisième degré, sachant que l'une des racines est égale à la somme des deux autres. Supposons que la racine a soit égale à la somme $b + c$ des deux autres. De la première relation $a + b + c = -A_1$ on tire $2a = -A_1$, d'où $a = -\frac{A_1}{2}$. La seconde relation $a(b + c) + bc = A_2$ donne $bc = A_2 - a^2 = A_2 - \frac{A_1^2}{4}$; donc les deux autres racines sont fournies par l'équation du second dégré

$$x^2 + \frac{A_1}{2} x + \left(A_2 - \frac{A_1^2}{4}\right) = 0.$$

La troisième relation donne $bc = -\frac{A_3}{a} = \frac{2A_3}{A_1}$. Pour que les racines de l'équation du troisième degré jouissent de la propriété énoncée, il faut donc que les coefficients de l'équation satisfassent à la relation

$$\frac{2A_3}{A_1} = A_2 - \frac{A_1^2}{4}.$$

176. THÉORÈME XIV. *Une équation algébrique, à coefficients réels, a ses racines imaginaires conjuguées deux à deux.*

Nous avons dit (n° 155) que, lorsque dans le polynôme $f(x)$ on remplace x par $a+bi$, le polynôme acquiert une valeur de la forme $A+Bi$. Remplaçons maintenant x par la quantité imaginaire conjuguée $a-bi$; si tous les coefficients sont réels, il est clair que la valeur du polynôme ne différera de la précédente qu'en ce que i aura été changé en $-i$; on aura donc la quantité conjuguée $A-Bi$.

Si $a+bi$ est racine de l'équation $f(x)=0$, le premier résultat est nul, et l'on a séparément $A=0$, $B=0$; donc le second résultat est également nul, et la quantité $a-bi$ est aussi racine de l'équation.

Cette proposition n'est vraie que si tous les coefficients de l'équation sont réels; car s'il y a des coefficients imaginaires, quand on remplace $a+bi$ par $a-bi$, on change le signe de i dans la valeur de x, mais non dans les coefficients qui restent constants; on ne peut plus dire alors que le second résultat soit conjugué du premier.

177. REMARQUE I. Si la racine $a+bi$ est du degré n de multiplicité, elle annule le polynôme proposé $f(x)$, et ses $n-1$ premières dérivées; ces polynômes, ayant leurs coefficients réels, admettent la racine conjugée $a-bi$, et par conséquent cette quantité est aussi racine de l'ordre n de multiplicité de l'équation $f(x)=0$. Ainsi *les racines imaginaires conjuguées d'une équation algébrique, à coefficients réels, sont du même ordre de multiplicité.*

Le produit des facteurs premiers

$$(x-a-bi)(x-a+bi)$$

qui correspondent à deux racines imaginaires conjuguées,

est un polynôme de second degré

$$(x-a)^2+b^2$$

à coefficients réels. Si les deux racines imaginaires conjuguées sont du degré n de multiplicité, le polynôme $f(x)$ est divisible par

$$[(x-a)^2+b^2]^n.$$

On en conclut qu'*un polynôme entier à coefficients réels se décompose en facteurs réels du premier ou du second degré.*

178. Remarque II. Dans ce qui précède, nous avons supposé les coefficients réels; supposons-les, non-seulement réels, mais encore commensurables; dans ce cas, si l'équation admet une raison incommensurable de la forme $a+\sqrt{b}$, a et b étant des nombres commensurables, elle admettra la racine conjuguée $a-\sqrt{b}$. Concevons, en effet, que l'on remplace dans le polynôme x par $a+\sqrt{b}$ et que l'on développe les diverses puissances de $a+\sqrt{b}$, suivant la loi du binôme; comme les puissances paires de $\sqrt{b}$ sont rationnelles et les puissances impaires de la forme $B\sqrt{b}$, B étant une quantité rationnelle, il est clair que l'on arrivera à une expression de la forme $P+Q\sqrt{b}$, en désignant par P et Q des quantités commensurables. Remplaçons maintenant x par $a-\sqrt{b}$; si tous les coefficients sont commensurables, la valeur du polynôme ne différera de la précédente que par le signe de $\sqrt{b}$, et l'on obtiendra la quantité conjuguée $P-Q\sqrt{b}$. Pour que $a+\sqrt{b}$ soit racine de l'équation, c'est-à-dire pour que la quantité $P+Q\sqrt{b}$ soit

nulle, il faut que l'on ait séparément $P = o$, $Q = o$; donc $a - \sqrt{b}$ est aussi racine de l'équation.

Cette propriété, qui a de l'analogie avec la précédente, est beaucoup moins générale; il arrive rarement que l'équation admette une racine de la forme $a + \sqrt{b}$; lorsque cela a lieu, le premier membre admet un facteur du second degré

$$(x - a - \sqrt{b})(x - a + \sqrt{b}) = (x - a)^2 - b,$$

à coefficients commensurables.

Règle des signes de Descartes.

179. Lorsqu'un polynôme à coefficients réels est ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x, deux termes consécutifs affectés de signes contraires présentent ce qu'on nomme une *variation*. Par exemple l'équation

$$x^5 - 3x^4 - 2x^3 + x^2 + 7x - 8 = o$$

a trois variations : une du premier au second terme, une du troisième au quatrième, une du cinquième au sixième. Nous démontrerons d'abord le lemme suivant :

LEMME. *Lorsqu'on multiplie un polynôme par* $x - a$, a *étant un nombre positif, on introduit au moins une variation nouvelle dans le polynôme.*

Un polynôme quelconque, à coefficients réels, ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x, peut être écrit sous la forme

$$A_m x^m \ldots\ldots + A_{n+1} x^{n+1} - A_n x^n \ldots\ldots - A_{p+1} x^{p+1} + A_p x^p \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots \pm A_{s+1} x^{s+1} \mp A_s x^s \ldots\ldots\ldots \mp A_0.$$

Le polynôme commence par un groupe de termes positifs, puis vient un groupe de termes négatifs, puis un groupe de termes positifs, et ainsi de suite jusqu'au dernier groupe qui commence au terme $\mp A_s x^s$, à partir duquel il n'y a plus de changements de signes. Chaque groupe contient un nombre quelconque de termes et même un seul terme. Les variations se présentent quand on passe du dernier terme d'un groupe au premier du groupe suivant.

En multipliant ce polynôme par $x - a$, nous aurons

$$\begin{array}{r|r|r|r} A_m x^{m+1} \ldots\ldots - A_n & x^{n+1} \ldots\ldots + A_p & x^{p+1} \ldots\ldots \mp A_s & x^{s+1} \ldots\ldots \\ - A_{n+1} a & + A_{p+1} a & \mp A_{s+1} a & \pm A_0 a. \end{array}$$

La multiplication par x conserve à chaque terme son signe et donne la première ligne; la multiplication par $-a$ change tous les signes et donne la seconde ligne. Le premier terme $A_m x^{m+1}$ du produit a le signe $+$; le terme du degré $n+1$, provenant de l'addition de deux termes négatifs, a le signe $-$; quels que soient les signes des termes intermédiaires, il est certain qu'entre ces deux termes de signes contraires il y a au moins une variation; on retrouve ainsi au produit la première variation du multiplicande, celle qui a lieu de x^m à x^n. De même le terme du degré $p+1$, provenant de l'addition de deux termes positifs, a le signe $+$; entre les deux termes en x^{n+1} et en x^{p+1}, qui sont de signes contraires, il y a au moins une variation, et l'on retrouve ainsi au produit la seconde variation du multiplicande, celle qui a lieu de x^n à x^p. Pour simplifier le raisonnement, nous pouvons réduire le multiplicande aux premiers termes des différents groupes, et ne considérer dans le produit que les termes correspondants, c'est-à-dire ceux dont le degré est supérieur d'une unité; ces termes du produit étant affectés des mêmes

signes que les termes correspondants du multiplicande, il est clair que l'on retrouve au produit toutes les variations du multiplicande. Ainsi, quand on sera arrivé au terme en x^{s+1}, on aura retrouvé au produit toutes les variations du multiplicande. A partir du terme en x^s, le multiplicande ne présente plus aucune variation; mais le terme constant $\mp A_0$ du multiplicande, multiplié par $-a$, donne le dernier terme $\pm A_0 a$ du produit; ce dernier terme ayant un signe contraire à celui du terme en x^{s+1}, le dernier groupe du produit contiendra encore au moins une variation. On en conclut que le produit contient au moins une variation de plus que le multiplicande.

Il peut arriver que la multiplication par $x-a$ introduise plus d'une variation nouvelle; dans ce cas elle en introduit ou 3, ou 5,....., en général un nombre impair. En effet, dans chacun des groupes du produit, nous avons retrouvé la variation correspondante du multiplicande; mais, dans ce groupe, il peut y avoir plus d'une variation; car les termes intermédiaires, provenant de l'addition de deux termes de signes contraires, ont des signes quelconques; mais, lorsqu'il y en a plus d'une, il y a un nombre impair, c'est-à-dire une, plus un nombre pair, parce que entre deux termes de signes contraires il y a nécessairement un nombre impair de changements de signes; ainsi chaque groupe du produit pourra introduire un nombre pair de variations nouvelles. Le dernier groupe en introduit un nombre impair; on a donc en tout un nombre impair de variations nouvelles.

180. Théorème XV. *Dans une équation algébrique à coefficients réels, le nombre des racines positives ne peut surpasser le nombre des variations.*

Soit $f(x)=0$ une équation à coefficients réels ayant un

certain nombre de racines positives $a, b, c, \ldots g$, on a

$$f(x) = (x-a)(x-b) \ldots (x-g)\varphi(x),$$

le quotient $\varphi(x)$ ayant aussi ses coefficients réels. Or, si nous multiplions ce polynôme successivement par chacun des facteurs binômes $x-a$, $x-b, \ldots, x-g$, qui correspondent aux racines positives, chaque multiplication introduisant au moins une variation nouvelle, le produit final $f(x)$ contiendra au moins autant de variations qu'il y a de racines positives.

181. REMARQUE. ***Si le nombre des racines positives n'est pas égal au nombre des variations, il en diffère d'un nombre pair.*** Nous remarquons d'abord que le polynôme $\varphi(x)$ a son dernier terme positif, sans quoi il aurait une racine positive, ce qui est contraire à l'hypothèse; ce polynôme contient donc un nombre pair de variations, s'il en contient. D'autre part, nous avons vu que la multiplication par chacun des facteurs $x-a$ introduit un nombre impair de variations, c'est-à-dire une, plus un nombre pair; on aura ainsi finalement dans le polynôme $f(x)$ autant de variations qu'il y a de racines positives, plus une somme de nombres pairs, c'est-à-dire plus un nombre pair de variations.

Par exemple, l'équation

$$x^5 - 3x^4 - 2x^3 + x^2 + 7x - 8 = 0$$

présente trois variations. Elle ne peut admettre plus de trois racines positives; elle en aura trois ou une.

L'équation

$$x^7 - 5x^3 + 8x^2 - 4x + 6 = 0$$

présente quatre variations; elle ne peut admettre plus de

quatre racines positives; elle en aura quatre, ou deux, ou pas du tout.

L'équation

$$x^6+4x^3-5=0$$

présente une seule variation. Elle ne peut avoir plus d'une racine positive, et elle en a certainement une.

182. Corollaire. Si dans l'équation $f(x)=0$, on change x en $-x$, on obtient une nouvelle équation qui a évidemment pour racines celles de l'équation proposée changées de signes; ainsi, les racines négatives de la première deviennent positives dans la seconde. Si donc on applique le théorème précédent à l'équation transformée, on aura une limite supérieure du nombre des racines négatives de l'équation proposée.

Soit, par exemple, l'équation

$$x^5-3x^4-2x^3+x^2+7x-8=0$$

en remplaçant x par $-x$, on obtient la transformée

$$-x^5-3x^4+2x^3+x^2-7x-8=0,$$

qui présente deux variations. Cette dernière équation admet au plus deux racines positives, et par conséquent la proposée au plus deux racines négatives. Si elle n'en a pas deux, elle n'en a pas du tout.

De même l'équation

$$x^7-5x^3+8x^2-4x+6=0,$$

ayant pour transformée l'équation

$$-x^7+5x^3+8x^2+4x+6=0,$$

qui présente une seule variation, a une racine négative et

une seule. Nous avons vu déjà que cette équation a au plus quatre racines positives; elle admet donc au plus cinq racines réelles; comme elle a sept racines, puisqu'elle est du septième degré, on en conclut qu'elle a au moins deux racines imaginaires.

L'équation

$$x^6 + 4x^3 - 5 = 0$$

ayant pour transformée

$$x^6 - 4x^3 - 5 = 0,$$

a un racine négative, et une seule. Nous avons vu déjà qu'elle a une racine positive; donc, elle a en tout deux racines réelles, et, par conséquent, quatre racines imaginaires.

183. Remarque II. Lorsqu'on sait, par la nature de la question, que l'équation a toutes ses racines réelles, le nombre des variations donne exactement le nombre des racines positives. Désignons par v et v' les nombres de variations que présentent l'équation proposée et sa transformée, et supposons d'abord l'équation complète, c'est-à-dire renfermant $m + 1$ termes. Quand on remplace x par $-x$, les termes changent de signes de deux en deux; si deux termes consécutifs présentent une permanence, c'est-a-dire ont le même signe dans l'équation proposée, ils présenteront une variation dans la transformée, et réciproquement; donc le nombre v' des variations de la transformée est égal au nombre des permanences de l'équation proposée; mais il est évident que le nombre des variations, plus le nombre des permanences de l'équation proposée, est égal à m; on a donc $v + v' = m$. Appelons p le nombre des racines positives, n le nombre des racines négatives; d'après le théorème

de Descartes, on a

$$p \leqq v.$$
$$n \leqq v'.$$

Lorsque toutes les racines sont réelles, on doit avoir $p = v$, $n = v'$; car s'il y avait un signe d'inégalité, on aurait $p + n < v + v'$, et par conséquent $p + n < m$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Considérons maintenant le cas où l'équation est incomplète; si l'on complète l'équation en introduisant des termes affectés de signes quelconques, on ne diminue pas le nombre des variations; on a donc $v + v' \leqq m$. Lorsque toutes les racines sont réelles, on doit avoir $p = v$, $n = v'$, $v + v' = m$; car, s'il y avait un seul signe d'inégalité, on en déduirait $p + n < m$.

Trouver une limite supérieure des racines positives.

184. Quand on veut calculer les racines réelles d'une équation, il importe de déterminer d'abord des quantités entre lesquelles soient comprises toutes ces racines. On appelle *limite supérieure* des racines positives d'une équation un nombre plus grand que la plus grande racine positive; si un nombre positif x_1 jouit de cette propriété que, pour toutes les valeurs de x égales ou supérieures à x_1, le polynôme $f(x)$, dont nous supposons tous les coefficients réels et le premier positif, ait une valeur plus grande que zéro, il est clair qu'il n'y aura pas de racine au delà de x_1, et que par conséquent x_1 sera une limite supérieure des racines positives.

Première méthode. Soit

$$y = x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_m$$

le polynôme proposé, dont on peut réduire le premier coefficient à l'unité; appelons M le plus grand coefficient négatif; on a évidemment

$$y \geqq x^m - Mx^{m-1} - Mx^{m-2} - \ldots\ldots - M,$$

ou

$$y \geqq x^m - M(x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + x + 1)$$

et, en faisant la somme des termes dans la parenthèse,

$$y \geqq x^m - \frac{M(x^m - 1)}{x - 1}.$$

Supposons x plus grand que l'unité; la fraction étant plus petite que $\frac{Mx^m}{x-1}$, le second membre est plus grand que $x^m - \frac{Mx^m}{x-1}$, et l'on a

$$y > x^m - \frac{Mx^m}{x-1},$$

ou

$$y > \frac{x^m(x - 1 - M)}{x - 1}.$$

On voit par là que, pour toutes les valeurs de x égales ou supérieures à $M + 1$, le polynôme est plus grand que zéro: on en conclut que $M + 1$ est une limite supérieure des racines positives.

185. Lorsque le terme du degré $m - 1$ a son coefficient positif, on peut abaisser beaucoup cette limite. Soit $m - n$ le degré du premier terme négatif; on a évidemment

$$y \geqq x^m - Mx^{m-n} - Mx^{m-n-1} - \ldots\ldots - M,$$

ou

$$y \geqq x^m - \frac{M(x^{m-n+1} - 1)}{x - 1}.$$

Supposons encore x plus grand que l'unité; la fraction étant plus petite que $\frac{Mx^{m-n+1}}{x-1}$, le second nombre est plus grand que $x^m - \frac{Mx^{m-n+1}}{x-1}$, et l'on a

$$y > x^m - \frac{Mx^{m-n+1}}{x-1},$$

ou

$$y > x^{m-n+1}\left(x^{n-1} - \frac{M}{x-1}\right).$$

Si dans la parenthèse on remplace x^{n-1} par la quantité plus petite $(x-1)^{n-1}$, on diminue le second membre, et l'on a, à plus forte raison,

$$y > x^{m-n+1}\left[(x-1)^{n-1} - \frac{M}{x-1}\right],$$

ou

$$y > \frac{x^{m-n+1}[(x-1)^n - M]}{x-1}.$$

On en conclut que le polynôme est plus grand que zéro, pour toutes les valeurs de x vérifiant l'inégalité $(x-1)^n \geqq M$, ou $x - 1 \geqq \sqrt[n]{M}$, c'est-à-dire pour toutes les valeurs de x égales ou supérieures à $1 + \sqrt[n]{M}$. Cette quantité est donc une limite supérieure des racines positives.

En appliquant la même règle à l'équation $f(-x) = 0$, on obtiendra une limite supérieure des valeurs absolues des racines négatives de l'équation proposée.

Considérons, par exemple, l'équation

$$x^7 + 4x^6 - 10x^5 - 13x^4 + 7x^3 + 12x^2 - 9 = 0.$$

Le plus grand coefficient négatif est 13; le premier terme

négatif est du cinquième degré; ici $n = 2$; la formule $1 + \sqrt[n]{M}$ donne $1 + \sqrt{13}$; donc 5 est une limite supérieure des racines positives.

En remplaçant x par $-x$, on a l'équation

$$x^7 - 4x^6 - 10x^5 + 13x^4 + 7x^3 - 12x^2 + 9 = 0;$$

le plus grand coefficient négatif est 12; la formule $1 + M$ donne la limite supérieure 13. Ainsi les racines réelles de l'équation proposée sont comprises entre -13 et $+5$.

186. Deuxième méthode. La règle des signes de Descartes donne un moyen très-commode de trouver une limite supérieure des racines positives d'une équation.

Considérons d'abord une équation qui ne présente qu'une seule variation

$$x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 5x - 60 = 0.$$

Cette équation, n'ayant qu'une variation, n'admet qu'une seule racine positive a. Imaginons que l'on fasse croître x de zéro à $+\infty$; tant que x reste inférieur à la racine a, le polynôme conserve une valeur négative. Dès que x dépasse a, le polynôme devient positif; l'équation n'ayant pas d'autre racine positive, le polynôme ne change plus de signe et par conséquent reste constamment positif au delà de a. On en conclut que toute quantité qui rend le polynôme positif est plus grande que a, ce qui donne une limite supérieure de la racine positive. Dans l'exemple actuel, 4 est une limite supérieure.

Soit maintenant une équation quelconque

$$x^7 + 4x^6 - 10x^5 - 13x^4 + 7x^3 + 12x^2 - 9 = 0.$$

Partageons-la en groupes de termes ordonnés suivant les

puissances décroissantes de x, et ne renfermant chacun qu'une variation,

$$x^4(x^3+4x^2-10x-13)+(7x^3+12x^2-9)=0.$$

En substituant des nombres entiers consécutifs, on voit que $x=3$ rend positif le premier groupe ainsi que le second: pour toutes les valeurs de x supérieures à 3, les deux groupes ayant des valeurs positives, le polynôme a aussi une valeur positive; donc 3 est une limite supérieure des racines positives de l'équation.

Si l'on change le signe de x, l'équation devient

$$x^7-4x^6-10x^5+13x^4+7x^3-12x^2+9=0;$$

on l'écrira

$$x^5(x^2-4x-10)+x^2(13x^2+7x-12)+9=0.$$

Le nombre 6, rendant positifs le premier et second groupe, est une limite supérieure des racines de cette équation. Donc les racines de l'équation proposée sont comprises entre -6 et $+3$. Les limites que nous trouvons ainsi sont préférables à celle que donne la première méthode.

Considérons encore l'équation

$$x^4-6x^3+2x^2-20x-15=0.$$

Partageons d'abord les termes en deux groupes

$$x^3(x-6)+(2x^2-20x-15)=0,$$

dans l'ordre où ils se présentent. Le premier groupe est positif pour les valeurs de x plus grandes que 6; le polynôme du second degré qui constitue le second groupe, ayant sa racine positive inférieure à 11, est positif pour toutes les valeurs de x supérieures à 11; on en conclut que 11 est une

limite supérieure des racines positives. Mais on peut abaisser cette limite, en partageant le terme négatif $-20x$ en deux parties, et joignant l'une des parties au premier groupe. ce qui fait

$$x(x^3 - 6x^2 - 10) + (2x^2 - 10x - 15) = 0.$$

Les deux groupes étant positifs pour $x = 7$, ce nombre est une limite supérieure.

Diviseurs d'un polynôme.

187. Considérons un polynôme entier que nous supposerons décomposé en facteurs premiers

$$f(x) = A(x-a)^n(x-b)^p(x-c)^q \ldots\ldots$$

Pour qu'un polynôme entier le divise exactement, il est nécessaire et il suffit que ce second polynôme soit formé des mêmes facteurs premiers, avec des exposants au plus égaux. Un polynôme diviseur sera donc de la forme

$$A'(x-a)^\alpha(x-b)^\beta(x-c)^\gamma \ldots\ldots,$$

les exposants α, β, γ,..... étant au plus égaux respectivement à n, p, q,....., et l'on obtiendra tous les diviseurs en donnant à α les valeurs 0, 1, 2,.....n, à β les valeurs 0, 1, 2,.....p, etc., de sorte que le nombre des diviseurs algébriques est

$$(n+1)(p+1)(q+1) \ldots\ldots - 1.$$

Nous regardons comme un même diviseur algébrique les polynômes qui ne diffèrent que par un facteur constant.

Plus grand commun diviseur algébrique.

188. Étant donnés deux polynômes entiers, on appelle

plus grand commun diviseur algébrique de ces deux polynômes le polynôme entier du plus haut degré qui divise exactement les deux polynômes proposés. Si l'on suppose ces deux polynômes décomposés en facteurs premiers, le plus grand commun diviseur sera le produit des facteurs premiers communs, affectés chacun du plus petit exposant. Mais on peut trouver le plus grand commun diviseur par une série de divisions, comme en arithmétique.

Appelons X et X_1 les deux polynômes proposés, ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de x, et supposons que x soit d'un degré supérieur ou égal à X_1. Divisons X par X_1 ; appelons Q le quotient et X_2 le reste, ce qui donne

$$X = X_1 Q + X_2.$$

Je dis que le plus grand commun diviseur entre X et X_1 est le même qu'entre X_1 et X_2. En effet, soit $(x-a)^n$ un facteur commun à X et à X_1 ; si l'on pose $X=(x-a)^n X'$, $X_1=(x-a)^n X'_1$, on a

$$X_2 = X - X_1 Q = (x-a)^n (X' - X'_1 Q);$$

le polynôme X_2 étant égal au produit de $(x-a)^n$ par un polynôme entier, admet aussi le facteur $(x-a)^n$. Ainsi tout facteur de la forme $(x-a)^n$ commun à X et X_1 est aussi commun à X_1 et à X_2. On démontrerait de même que, réciproquement, tout facteur de cette forme commun à X_1 et à X_2 est aussi commun à X et X_1. Les facteurs premiers communs étant les mêmes de part et d'autre, les produits de ces facteurs communs, ou les plus grands communs diviseurs, sont les mêmes.

Ainsi, la question est ramenée à la recherche du plus grand commun diviseur entre X_1 et X_2. On procédera de la même manière : en divisant X_1 par X_2, et appelant X_3 le

reste, on aura

$$X_1 = X_2 Q_1 + X_3.$$

Le plus grand commun diviseur entre X_1 et X_2 est le même qu'entre X_2 et X_3.

Divisons X_2 par X_3, et supposons que l'on trouve un reste nul; il est clair que X_3, divisant exactement X_2, est le produit des facteurs premiers communs à X_2 et à X_3; c'est donc le plus grand commun diviseur cherché.

Ainsi, *pour trouver le plus grand commun diviseur de deux polynômes, après avoir ordonné ces deux polynômes par rapport aux puissances décroissantes de* x, *on divise celui qui est du degré le plus élevé par l'autre, celui-ci par le reste de la division, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive à un reste nul. Le dernier diviseur est le plus grand commun diviseur cherché.*

Dans ces opérations, les restes, et par suite les diviseurs successifs, vont en diminuant de degré; on arrivera donc à un reste nul ou à un reste indépendant de x. Dans le premier cas, les deux polynômes admettent un plus grand commun diviseur algébrique d'un certain degré. Dans le second cas, ils n'en admettent pas, et sont dits premiers entre eux.

189. Remarque. Dans la pratique, afin d'éviter les coefficients fractionnaires, on peut multiplier tous les termes de l'un quelconque des polynômes par une quantité indépendante de x. De même, si l'on aperçoit un facteur commun aux coefficients de tous les termes d'un certain reste, on peut le supprimer. Je suppose, par exemple, que pour effectuer la première divison on ait multiplié le dividende par un nombre A, et qu'ensuite on ait divisé tous les termes du reste par le nombre B, on

aura

$$AX = X_1Q + BX_2.$$

On démontrera comme précédemment que tout facteur de la forme $(x-a)^n$ commun à X et à X_1 est aussi commun à X_1 et à X_2, et réciproquement. Ainsi rien n'est changé dans la recherche du plus grand commun diviseur.

Racines communes à deux équations.

190 Si les deux équations

$$X = 0, \qquad X_1 = 0$$

ont n racines communes, les deux polynômes X et X_1 admettent n facteurs du premier degré communs, et, par conséquent, ils ont un plus grand commun diviseur du degré n. Pour trouver les racines communes à deux équations, on cherchera donc le plus grand commun diviseur des deux premiers membres de ces équations; soit D ce plus grand commun diviseur, l'équation

$$D = 0$$

donnera les racines communes aux deux équations.

Si les deux polynômes n'ont pas de plus grand commun diviseur algébrique, les deux équations n'ont pas de racine commune. Si le plus grand commun diviseur est du premier degré, il y a une racine commune; s'il est du second degré, il y a deux racines communes, etc.

Exemples.

1° Trouver les racines communes aux deux équations

$$x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 5x + 2 = 0,$$
$$2x^3 - 5x^2 + x + 2 = 0,$$

Voici le détail des opérations :

$$\begin{array}{r|l|l}
 & x-1 & 2x+1 \\
x^4-3x^3+3x^2-3x+2 & 2x^3-5x^2+x+2 & x^2-3x+2 \\
\hline
2x^4-6x^3+6x^2-6x+4 & -2x^3+6x^2-4x & \\
-2x^4+5x^3-x^2-2x & x^2-3x+2 & \\
\hline
-x^3+5x^2-8x+4 & 0 & \\
-2x^3+10x^2-16x+8 & & \\
+2x^3-5x^2+x+2 & & \\
\hline
5x^2-15x+10 & & \\
x^2-3x+2 & &
\end{array}$$

On a multiplié deux fois le premier dividende par 2 afin d'éviter les fractions, et on a simplifié le reste en le divisant par 5. Le plus grand commun diviseur des deux polynômes est x^2-3x+2. Il y a donc deux racines communes qui seront données par l'équation

$$x^2-3x+2=0\,;$$

ces deux racines communes sont 1 et 2.

2° Résoudre l'équation

$$x^4-4x^3+4x^2-4x+3=0,$$

sachant que l'une des racines surpasse une autre racine de 2. Posons $x=x'+2$, et remplaçons x par cette valeur dans l'équation proposée, nous formerons la nouvelle équation

$$(x'+2)^4-4(x'+2)^3+4(x'+2)^2-4(x'+2)+3=0,$$

ou, en développant et supprimant l'accent,

$$x^4+4x^3+4x^2-4x-5=0.$$

16

De la relation $x = x' + 2$, on déduit $x' = x - 2$; les valeurs de x', ou les racines de la nouvelle équation, sont inférieures de deux unités aux valeurs de x, c'est-à-dire aux racines de l'équation proposée; celle-ci ayant deux racines telles que a et $a + 2$, la seconde admettra les racines $a - 2$ et a; il en résulte que les deux équations ont une racine commune a, et par suite, les deux polynômes un plus grand commun diviseur du premier degré. En cherchant ce plus grand commun diviseur, on trouve $x - 1$. Ainsi l'équation proposée admet la racine 1, et, par conséquent, la racine $1 + 2$ ou 3; connaissant deux racines, la division par $x - 1$ et par $x - 3$ ramènera l'équation à une équation du second degré $x^2 + 1 = 0$, qui donnera les deux autres racines.

Élimination.

191. Considérons deux équations

$$(1) \qquad f(x, y) = 0, \quad F(x, y) = 0,$$

à deux inconnues x et y. Éliminer une inconnue y entre ces deux équations, c'est trouver un système de deux équations, équivalant au système des deux équations proposées, et dont l'une ne contienne plus l'inconnue y. Soient x_1 et y_1 l'une quelconque des solutions, c'est-à-dire des valeurs qui, mises à la place de x et y, vérifient les équations proposées. Si nous remplaçons x par x_1, nous aurons deux équations

$$f(x_1, y) = 0, \quad F(x_1, y) = 0$$

à une seule inconnue y, admettant une racine commune y_1; les deux polynômes $f(x_1, y)$, $F(x_1, y)$ en y ont donc un plus

grand commun diviseur du premier degré de la forme $y-y_1$; le reste qui est indépendant de y devra être nul. Supposons que l'on ordonne les deux polynômes proposés $f(x,y)$, $F(x,y)$ par rapport aux puissances décroissantes de y et que, regardant x comme une constante, on effectue les divisions successives à l'aide desquelles on cherche le plus grand commun diviseur, jusqu'à ce qu'on arrive à un diviseur $My+N$ du premier degré en y; le reste étant indépendant de y, est une fonction de x que nous désignerons par $\varphi(x)$.

La valeur $x=x_1$, devant annuler le reste, sera une racine de l'équation $\varphi(x)=0$; on obtiendra la valeur correspondante y_1 de y au moyen de l'équation $My+N=0$, après avoir remplacé x par x_1 dans M et N. Ainsi le système proposé est remplacé par le système des deux équations

$$(2) \qquad My+N=0, \qquad \varphi(x)=0.$$

Cependant il y a des précautions à prendre; afin d'éviter les coefficients fractionnaires dans l'un des quotients, on multiplie le dividende par des quantités qui ne sont plus des constantes, mais qui renferment la lettre x. Ceci pourrait introduire dans l'équation $\varphi(x)=0$ des solutions étrangères.

192. Pour montrer une application de cette méthode, étant donnée une équation $f(x)=0$ du degré m, cherchons l'équation dont les racines sont les différences des racines de l'équation proposée deux à deux. Appelons a et b deux racines quelconques de l'équation proposée et posons $y=a-b$, on a

$$f(a)=0, \qquad f(b)=0, \qquad y=a-b.$$

Le nombre des valeurs de y est $m(m-1)$; mais, comme rien ne distingue les racines, les équations précédentes

admettent la solution $b = a$, d'où $y = 0$; pour supprimer cette solution, nous remplacerons l'équation $f(b) = 0$ par l'équation $f(b) - f(a) = 0$, que nous diviserons par $b - a$, et nous aurons à éliminer a et b entre les trois équations

$$f(a) = 0, \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0, \quad y = a - b.$$

Les racines $a - b$ et $b - a$ de l'équation finale en y étant deux à deux égales et de signes contraires, cette équation ne change pas, quand on y remplace y par $-y$; elle ne renfermera donc que des puissances paires de y. Si l'on pose $y^2 = z$, on aura une équation en z du degré $\frac{m(m-1)}{2}$, ayant pour racines les carrés des différences des racines de l'équation proposée deux à deux.

Considérons en particulier l'équation du troisième degré

$$x^3 + px + q = 0.$$

Pour avoir l'équation aux différences des racines deux à deux, il faut éliminer a et b entre les trois équations

$$a^3 + pa + q = 0, \quad b^2 + ab + a^2 + p = 0, \quad y = a - b.$$

En portant dans la seconde la valeur $b = a - y$ tirée de la troisième, on a

$$3a^2 - 3ya + y^2 + p = 0,$$

et il faut éliminer a entre cette équation et l'équation

$$a^3 + pa + q = 0.$$

En divisant ce dernier polynôme par le précédent, et celui-ci par le reste de la division qui est du premier degré en a, on a un second reste indépendant de a. Ce dernier reste

égalé à zéro donne l'équation du sixième degré en y,

$$y^6 + 6py^4 + 9p^2y^2 + (4p^3 + 27q^2) = 0.$$

On en déduit l'équation aux carrés des différences

$$z^3 + 6pz^2 + 9p^2z + (4p^3 + 27q^2) = 0.$$

CHAPITRE III.

RACINES ÉGALES.

Nous avons déjà dit quelques mots des racines multiples (nº 170); lorsqu'un polynôme entier est divisible par $(x-a)^n$, on dit que a est racine multiple de l'ordre n; nous avons vu (nº 175) que, lorsque la variable x passe par une racine, le polynôme change de signe, si la racine est simple ou d'un degré impair de multiplicité, et ne change pas de signe, si la racine est d'un degré pair de multiplicité. Les racines multiples jouissent de propriétés particulières dont nous allons nous occuper.

193. Théorème I. *Un facteur premier d'ordre* n *d'un polynôme entier est facteur d'ordre* n — 1 *de sa dérivée.*

Soit

$$f(x) = (x-a)^n \times \varphi(x),$$

$\varphi(x)$ étant un polynôme entier qui ne contient plus le facteur $x-a$. En prenant la dérivée du produit, on a

$$f'(x) = n(x-a)^{n-1}\varphi(x) + (x-a)^n\varphi'(x),$$

ou

$$f'(x) = (x-a)^{n-1}[n\varphi(x) + (x-a)\varphi'(x)].$$

La parenthèse n'est pas divisible par $x-a$; car, si l'on y fait $x=a$, elle se réduit à $n\varphi(a)$, quantité qui n'est pas nulle. Ainsi la dérivée $f'(x)$ contient le facteur premier $x-a$ au degré $n-1$.

194. Théorème II. *Le plus grand commun diviseur entre un polynôme et sa dérivée est le produit des facteurs premiers qui composent le polynôme proposé, l'exposant de chacun d'eux étant diminué d'une unité.*

Supposons le polynôme proposé décomposé en ses facteurs premiers, et soit

$$f(x) = A(x-a)^n(x-b)^p(x-c)^q \ldots\ldots$$

En vertu du théorème précédent, la dérivée $f'(x)$ admet les facteurs $(x-a)^{n-1}$, $(x-b)^{p-1}$, $(x-c)^{q-1}$, ...; le produit des facteurs premiers commun aux deux polynômes $f(x)$, $f'(x)$, ou le plus grand commun diviseur algébrique, est donc

$$(x-a)^{n-1}(x-b)^{p-1}(x-c)^{q-1} \ldots\ldots$$

Si k désigne le nombre des facteurs premiers différents qui composent le polynôme proposé, comme l'exposant de chacun d'eux est diminué d'une unité, le plus grand commun diviseur est du degré $m-k$.

195. Corollaire. Il résulte du théorème I qu'une racine simple du polynôme $f(x)$ n'annule pas sa dérivée; qu'une racine double du polynôme est racine simple de sa première dérivée, mais n'annule pas sa seconde dérivée; qu'une racine triple du polynôme est racine double de la première dérivée, et par conséquent racine simple de la se-

conde dérivée, mais n'annule pas la troisième, et ainsi de suite. En général, une racine d'ordre n du polynôme $f(x)$ annule ses $n-1$ premières dérivées, et n'annule pas la n^e dérivée.

La réciproque est vraie; si la quantité a annule le polynôme $f(x)$ et ses $n-1$ premières dérivées, mais n'annule pas la n^e dérivée, c'est une racine d'ordre n du polynôme proposé. Car si la racine était d'un ordre n' inférieur à n, elle n'annulerait pas la n'^e dérivée; si elle était d'un ordre supérieur à n, elle annulerait la n^e dérivée, ce qui est contraire à l'hypothèse.

196. On a souvent besoin de chercher la relation qui doit exister entre les coefficients d'une équation algébrique entière pour que cette équation ait deux racines égales. Il est nécessaire et il suffit que les deux équations $f(x)=0$, $f'(x)=0$ aient une racine commune; on cherchera donc le plus grand commun diviseur des deux polynômes $f(x)$, $f'(x)$, et quand on sera arrivé à un diviseur du premier degré, on écrira que le reste est nul.

Mais l'emploi des fonctions homogènes simplifie beaucoup l'opération. Soit

$$f(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\ldots\ldots+A_m$$

le polynôme proposé; si l'on remplace x par $\frac{x}{y}$, on a

$$A_0\frac{x^m}{y^m}+A_1\frac{x^{m-1}}{y^{m-1}}+A_2\frac{x^{m-2}}{y^{m-2}}+\ldots\ldots+A_m;$$

en multipliant ensuite par y^m, on obtient une fonction entière homogène, et du degré m, des deux variables x et y; nous la désignerons par $f(x,y)$,

$$f(x,y)=A_0x^m+A_1x^{m-1}y+A_2x^{m-2}y^2+\ldots\ldots+A_my^m.$$

D'après une propriété des fonctions homogènes (nº 130), on a l'identité

$$xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y) = mf(x, y).$$

Si dans la fonction $f(x, y)$ on fait $y = 1$, on reproduit évidemment la fonction proposée $f(x)$; de même $f'_x(x, y)$ reproduit la dérivée $f'(x)$. Appelons a la racine double et concevons que dans l'égalité précédente on remplace x par a et y par 1; les deux polynômes $f(x, y)$ et $f'_x(x, y)$ s'annulent, le polynôme $f'_y(x, y)$ s'annulera aussi. Réciproquement si pour $x = a$ et $y = 1$, les deux polynômes $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ s'annulent, le polynôme $f(x, y)$ s'annulera aussi. Ainsi la condition pour que l'équation $f(x) = 0$ ait une racine double, c'est que les deux équations

$$f'_x(x, y) = 0, \quad f'_y(x, y) = 0,$$

dans lesquelles on fait $y = 1$, aient une racine commune.

Comme application, cherchons la condition pour que l'équation du troisième degré

$$x^3 + px + p = 0$$

ait deux racines égales. On a ici

$$f(x, y) = x^3 + pxy^2 + qy^3,$$
$$f'_x(x, y) = 3x^2 + py^2,$$
$$f'_y(x, y) = 2pxy + 3qy^2.$$

En égalant à zéro les deux dérivées partielles, dans lesquelles on fait $y = 1$, on a les deux équations

$$3x^2 + p = 0, \quad 2px + 3q = 0$$

qui doivent avoir une racine commune. De la seconde on tire

$$x = -\frac{3q}{2p},$$

et en portant cette valeur dans la première, on obtient la condition

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2=0.$$

La racine double est $x=-\frac{3q}{2p}$; la somme des racines étant nulle, la racine simple est $\frac{3q}{p}$.

On obtient la même condition, à l'aide de l'équation au carré des différences (n° 192); lorsque deux racines sont égales', l'une des valeurs de z est nulle, et le terme constant de l'équation devient nul.

Par exemple, les coefficients de l'équation

$$x^3-3x+2=0$$

vérifiant la condition précédente, l'équation admet une racine double $+1$, et une racine simple -2.

197. La méthode précédente peut être généralisée. Nous savons que pour qu'une équation $f(x)=0$ ait trois racines égales, il est nécessaire et il suffit que les trois équations

$$(1) \qquad f(x)=0,\ f'(x)=0,\ f''(x)=0$$

aient une racine commune. Considérons, comme précédemment, la fonction homogène $f(x,y)$ que l'on forme en remplaçant dans la fonction proposée x par $\frac{x}{y}$ et multipliant par y^m. Les deux dérivées partielles du premier ordre $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ sont des fonctions homogènes du degré $m-1$; en leur appliquant aussi le théorème des fonctions homogènes, on a les identités

$$xf'_x+yf'_y=mf(x,y),$$
$$xf''_{x^2}+yf''_{xy}=(m-1)f'_x(x,y),$$
$$xf''_{xy}+yf''_{y^2}=(m-1)f'_y(x,y).$$

Appelons a la racine triple ; faisons $x = a$ et $y = 1$; puisqu'on a $f(x) = 0$, $f'_x = 0$, $f''_{x^2} = 0$, on déduit de la première relation $f''_y = 0$ et des deux suivantes $f''_{xy} = 0$, $f''_{y^2} = 0$. Réciproquement, supposons que pour $x = a$ et $y = 1$, on ait

$$(2) \qquad f''_{x^2} = 0, \quad f''_{xy} = 0, \quad f''_{y^2} = 0;$$

les deux dernières relations donnent $f'_x = 0$, $f'_y = 0$ et la première $f(x) = 0$. Ainsi toute valeur de x qui satisfait aux équations (1) satisfait aux équations (2) et réciproquement. On en conclut que les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation $f(x) = 0$ ait trois racines égales sont que les équations (2) aient une racine commune. Ces conditions sont au nombre de deux. Les deux équations $f''_{x^2} = 0$, $f''_{xy} = 0$ doivent avoir une racine commune ; première condition. Cette racine doit annuler f''_{y^2} ; seconde condition.

Cherchons par exemple les conditions que l'équation du quatrième degré

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

ait trois racines égales. On a

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^4 + px^2y^2 + qxy^3 + ry^4, \\ f'_x &= 4x^3 + 2pxy^2 + qy^3, \\ f'_y &= 2px^2y + 3qxy^2 + 4ry^3, \\ f''_{x^2} &= 12x^2 + 2py^2, \\ f''_{xy} &= 4pxy + 3qy^2, \\ f''_{y^2} &= 2px^2 + 6qxy + 12ry^2. \end{aligned}$$

En égalant à zéro les trois dérivées partielles du second ordre, dans lesquelles on fait $y = 1$, on a les trois équa-

tions

$$12x^2+2p=0,$$
$$4px+3q=0,$$
$$2px^2+6qx+12r=0.$$

De la seconde on déduit $x=-\frac{3q}{4p}$; en portant cette valeur dans les deux autres, on a les deux conditions

$$\frac{3^3}{2^3}q^2=12pr=-p^3.$$

198. L'application du théorème II permet, non-seulement de reconnaître si une équation a des racines égales, mais encore de décomposer le polynôme en plusieurs autres, formés chacun du produit des facteurs premiers du même degré de multiplicité. Soit X le polynôme proposé; appelons X_1 le produit des facteurs premiers simples, X_2 le produit des facteurs doubles, chaque facteur étant pris seulement au premier degré, X_3 le produit des facteurs triples, et ainsi de suite; on écrira le polynôme X sous la forme

$$X=X_1X_2^2X_3^3X_4^4\ldots\ldots$$

Cherchons le plus grand commun diviseur entre le polynôme X et sa dérivée. S'il n'y a pas de commun diviseur algébrique, on en conclura que le polynôme n'admet que des racines simples, et l'on aura $X=X_1$. S'il y a un plus grand commun diviseur algébrique D_1, ce plus grand commun diviseur étant égal au produit des facteurs multiples dont on diminue les exposants d'une unité, sera de la forme

$$D_1=X_2X_3^2X_4^3\ldots\ldots,$$

et l'on conclura que le polynôme X admet des racines multiples.

Cherchons de même le plus grand commun diviseur entre le polynôme D_1 et sa dérivée; s'il n'y a pas de commun diviseur algébrique, on en conclura que le polynôme D_1 n'admet que des racines simples et l'on aura $D_1 = X_2$; dans ce cas, le polynôme proposé X admet des racines doubles, mais n'admet pas de racines d'un degré plus élevé de multiplicité. S'il y a un plus grand commun diviseur D_2, ce plus grand commun diviseur sera de la forme

$$D_2 = X_3 X_4^2 \ldots ;$$

on en conclura que le polynôme D_1 admet des racines multiples et par conséquent que le polynôme X admet des racines multiples d'un ordre égal ou supérieur à 3.

On cherchera ensuite le plus grand commun diviseur entre le polynôme D_2 et sa dérivée. S'il n'y a pas de commun diviseur algébrique, on en conclura que le polynôme D_2 n'admet que des racines simples et l'on aura $D_2 = X_3$; le polynôme proposé admet des racines triples, mais n'admet pas des racines d'un ordre plus élevé. S'il y a un plus grand commun diviseur D_3, ce plus grand commun diviseur sera de la forme

$$D_3 = X_4 \ldots ;$$

on en conclura que le polynôme D_2 admet des racines multiples et par conséquent que le polynôme X admet des racines multiples d'un ordre égal ou supérieur à 4.

On continuera de cette manière jusqu'à ce qu'on arrive à un polynôme premier avec sa dérivée. Supposons, pour fixer les idées, que le polynôme D_3 soit premier avec sa dérivée; on aura $D_3 = X_4$, et l'on en conclura que le polynôme X n'admet pas de racines multiples d'un ordre supérieur à 4. On a, dans ce cas, la suite des polynômes

$$X = X_1X_2^2X_3^3X_4^4,$$
$$D_1 = \quad X_2X_3^2X_4^3,$$
$$D_2 = \quad X_3X_4^2,$$
$$D_3 = \quad X_4.$$

En divisant chacun de ces polynômes par le suivant, on obtient une nouvelle suite de polynômes entiers que nous désignerons par Q_1, Q_2, Q_3.

$$Q_1 = \frac{X}{D_1} = X_1X_2X_3X_4,$$
$$Q_2 = \frac{D_1}{D_2} = \quad X_2X_3X_4,$$
$$Q_3 = \frac{D_2}{D_3} = \quad X_3X_4,$$
$$D_3 = \quad X_4,$$

Divisant chacun de ces nouveaux polynômes par le suivant, on a enfin

$$\frac{Q_1}{Q_2} = X_1,$$
$$\frac{Q_2}{Q_3} = X_2,$$
$$\frac{Q_3}{D_3} = X_3,$$
$$D_3 = X_4.$$

Une fois trouvés ces polynômes X_1, X_2, X_3, X_4, la résolution de l'équation proposée $X = o$ est ramenée à celle des équations

$$X_1 = o, \quad X_2 = o, \quad X_3 = o, \quad X_4 = o,$$

qui n'ont plus de racines égales; la première donne les racines simples de l'équation proposée, la seconde les racines doubles, la troisième les racines triples, etc.

Ainsi, *pour ramener la résolution d'une équation qui a*

des racines égales à celles d'autres équations de degrés moindres ayant leurs racines inégales, on cherche le plus grand commun diviseur entre le premier nombre de l'équation et sa dérivée, le plus grand commun diviseur entre ce premier plus grand commun diviseur et sa dérivée, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive à un polynôme premier avec sa dérivée; on divise ensuite le polynôme proposé par le premier plus grand commun diviseur, le premier par le second, et ainsi de suite; on divise enfin chacun de ces quotients par le suivant, et l'on égale à zéro ces nouveaux quotients. On obtient de la sorte des équations donnant, la première les racines simples, la seconde les racines doubles, la troisième les racines triples....., de l'équation proposée.

Exemple.

Soit l'équation du septième degré

$$X = x^7 - 2x^5 - x^4 + x^3 + 2x^2 - 1 = 0.$$

En cherchant le plus grand commun diviseur entre le polynôme X et sa dérivée, on trouve

$$D_1 = x^3 - x^2 - x + 1;$$

en cherchant le plus grand commun diviseur entre le polynôme D_1 et sa dérivée, on trouve

$$D_2 = x - 1;$$

ce dernier polynôme étant premier avec sa dérivée. On en conclut que l'équation proposée n'admet pas de racines multiples d'un ordre supérieur au troisième et l'on peut poser $X = X_1 X_2^2 X_3^3$. Divisant ces polynômes l'un par l'autre on a les quotients

$$Q_1 = \frac{X}{D_1} = x^4 + x^3 - x - 1,$$
$$Q_2 = \frac{D_1}{D_2} = x^2 - 1,$$
$$D_2 = x - 1.$$

De nouvelles divisions donnent

$$\frac{Q_1}{Q_2} = X_1 = x^2 + x + 1,$$
$$\frac{Q_2}{D_2} = X_2 = x + 1,$$
$$D_2 = X_3 = x - 1.$$

La résolution de l'équation proposée se trouve ainsi ramenée à celle des trois équations

$$x^2 + x + 1 = 0, \quad x + 1 = 0, \quad x - 1 = 0.$$

La première donne deux racines simples imaginaires, la seconde une racine double -1, la troisième une racine triple $+1$.

CHAPITRE IV.

RACINES COMMENSURABLES.

Recherche des racines entières.

199. Soit

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots\ldots + A_{m-1} x + A_m = 0$$

l'équation proposée, dont nous supposons tous les coefficients commensurables et même entiers; car s'ils n'étaient pas entiers, on les rendrait tels en multipliant tous les termes

de l'équation par un nombre convenable. Nous avons expliqué (nº 168) comment on effectue la division par $x - a$ du polynôme $f(x)$ ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x; le premier coefficient du quotient est égal au premier coefficient du dividende, et l'on forme chacun des autres coefficients en multipliant le coefficient précédent par a et ajoutant le coefficient correspondant du dividende. Si tous les coefficients du dividende sont entiers, si, de plus, a est un nombre entier, positif ou négatif, il est clair que le quotient ainsi formé aura ainsi tous ses coefficients entiers, puisqu'on les obtient en combinant des nombres entiers par multiplication et par addition.

Imaginons maintenant qu'ayant ordonné le polynôme par rapport aux puissances croissantes de x,

$$f(x) = A_m + A_{m-1}x + A_{m-2}x^2 + \ldots\ldots + A_1 x^{m-1} + A_0 x^m,$$

on le divise par $a - x$; le diviseur étant seulement changé de signe, le quotient changera simplement de signe, et par conséquent aura toujours ses coefficients entiers. Effectuons cette division

$$\begin{array}{r|l}
A_m + A_{m-1}x + A_{m-2}x^2 + A_{m-3}x^3 \ldots + A_0 x^m & a - x \\
\hline
(C_{m-1} + A_{m-1})x + A_{m-2}x^2 + A_{m-3}x^3 \ldots + A_0 x^m & C_{m-1} + C_{m-2}x + C_{m-3}x^2 \ldots + C_1 x^{m-2} + C_0 x^{m-1} \\
(C_{m-2} + A_{m-2})x^2 + A_{m-3}x^3 \ldots + A_0 x^m & \\
(C_{m-3} + A_{m-3})x^3 \ldots + A_0 x^m & \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
(C_1 + A_1)x^{m-1} + A_0 x^m & \\
(C_0 + A_0)x^m &
\end{array}$$

Le premier coefficient du quotient est $\frac{A_m}{a}$; ce nombre doit être entier; ainsi, une première condition à laquelle doit satisfaire une racine entière, c'est de diviser exactement le dernier terme A_m de l'équation. Pour abréger, représentons

par C_{m-1} le premier terme du quotient; multiplions-le par le diviseur $a - x$ et retranchons du dividende; le produit par a détruira le premier terme A_m du dividende, le produit par $-x$ s'ajoutera au second terme; de sorte que le second dividende aura pour premier terme $(C_{m-1} + A_{m-1})x$, les termes suivants restant les mêmes que dans le dividende proposé. Si l'on divise ce premier terme par a, on aura le second terme $\frac{C_{m-1} + A_{m-1}}{a} x$ du quotient; le second coefficient $\frac{C_{m-1} + A_{m-1}}{a}$ doit être entier; appelons-le C_{m-2}. Multiplions le second terme $C_{m-2}x$ du quotient par le diviseur $a-x$ et retranchons du dividende; le produit par a détruit le premier terme du second dividende, le produit par $-x$ s'ajoute au second terme; de sorte que le troisième dividende aura pour premier terme $(C_{m-2} + A_{m-2})x^2$, les termes suivants restant les mêmes que dans le dividende proposé. Si l'on divise ce premier terme par a, on aura le troisième terme $\frac{C_{m-2} + A_{m-2}}{a}x^2$ du quotient; le troisième coefficient $\frac{C_{m-2} + A_{m-2}}{a}$, que nous représenterons par C_{m-3} doit être entier, et ainsi de suite.

La loi est générale : on obtient un coefficient quelconque du quotient en ajoutant au précédent le coefficient du terme qui occupe dans le dividende le même rang que le terme que l'on veut former, et divisant la somme par a.

On arrivera ainsi au dernier dividende

$$(C_1 + A_1)x^{m-1} + A_0x^m,$$

qui donnera le dernier terme $\frac{C_1 + A_1}{a} x^{m-1}$ du quotient; le

dernier coefficient $\frac{C_1 + A_1}{a}$, que nous représenterons par C_0, doit aussi être entier. En multipliant le diviseur par le dernier terme $C_0 x^{m-1}$ du quotient et retranchant du dividende, on obtient le reste de la division $(C_0 + A_0)x^m$. Si a est racine de l'équation, le reste est nul, et l'on a $C_0 + A_0 = 0$.

Il résulte de ce qui précède que si l'on veut trouver les racines entières d'une équation à coefficients entiers, ordonnée suivant les puissances décroissantes de x, on n'essayera que les diviseurs du dernier terme, et l'on procédera de la manière suivante :

Règle. *Pour voir si un nombre entier* a *est racine de l'équation, on divisera le dernier terme par ce nombre; on ajoutera au quotient le coefficient de l'avant-dernier terme, et l'on divisera la somme par* a; *on ajoutera au quotient le coefficient du terme précédent, et l'on divisera la somme par* a, *et ainsi de suite. Toutes ces divisions doivent se faire exactement, et quand on aura ajouté le coefficient du premier terme de l'équation, on devra trouver un résultat égal à zéro.*

Lorsqu'un nombre entier a satisfait à toutes ces conditions, il est évidemment racine de l'équation; c'est ce qu'indique spécialement la dernière condition, qui exprime que le reste de la division du premier membre de l'équation par $a - x$ ou par $x - a$ est nul. On abaissera alors le degré de l'équation proposée en divisant son premier membre par $x - a$; mais il est à remarquer que le quotient est tout calculé; les coefficients de ce quotient sont précisément les quotients entiers obtenus dans les opérations précédentes et changés de signes. On continuera les essais, non plus sur l'équation proposée, mais sur l'équation simplifiée.

Exemples.

1° Trouver les racines entières de l'équation

$$x^6 - x^5 - 6x^4 - x^2 + x + 6 = 0.$$

On commencera par essayer 1; pour que 1 soit racine, il faut que la somme des coefficients positifs égale celle des coefficients négatifs : c'est ce qui a lieu ici : donc 1 est racine. On divisera le premier membre de l'équation par $x - 1$, d'après la règle du n° 168, et l'on aura à considérer l'équation

$$x^5 - 6x^3 - 6x^2 - 7x - 6 = 0.$$

Cette équation n'admet plus la racine 1; on essayera -1 : si l'on remplace x par -1, on a un résultat nul

$$-1 + 6 - 6 + 7 - 6 = 0;$$

donc -1 est racine. On divisera l'équation par $x + 1$, d'après la même règle, et l'on aura l'équation

$$x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6 = 0.$$

Après s'être assuré que cette équation n'admet plus la racine -1, on essayera les diviseurs du dernier terme 6, pris avec le signe $+$ ou le signe $-$. Essayons d'abord le diviseur le plus simple $+2$, et pour cela procédons d'après la règle formulée plus haut; parcourant le polynôme de droite à gauche, nous dirons : le dernier terme -6 divisé par 2 donne -3; ajoutant le coefficient suivant -1, on a -4 qui, divisé par 2, donne -2 : ajoutant le coefficient suivant -5, on a -7, qui n'est pas divisible par 2 : ainsi 2 n'est pas racine.

Essayons maintenant -2, et écrivons les quotients suc-

cessifs de droite à gauche,

$$-1, \quad +3, \quad -1, \quad +3.$$

Le dernier terme — 6 divisé par — 2 donne + 3; ajoutant — 1, on a + 2 qui, divisé par — 2, donne — 1 ; ajoutant — 5, on a — 6 qui, divisé par — 2, donne + 3; ajoutant — 1, on a + 2 qui, divisé par — 2, donne — 1 ; ajoutant le premier coefficient + 1, on obtient pour résultat zéro. Ainsi — 2 est racine. Les nombres écrits plus haut, changés de signes, sont les coefficients du quotient de la division du premier membre de l'équation par $x + 2$; on écrira donc immédiatement l'équation

$$x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0.$$

Le nombre — 2 ne peut être une seconde fois racine, puisqu'il ne divise plus le dernier terme. Les seuls nombres à essayer sont maintenant les diviseurs de 3, savoir + 3 et — 3. Si l'on essaye + 3, on a les quotients

$$-1, \quad 0, \quad -1;$$

donc + 3 est racine, et, en divisant par $x - 3$, on arrive à l'équation du second degré

$$x^2 + 1 = 0,$$

qui a deux racines imaginaires $+ i$ et $- i$.

L'équation proposée est complétement résolue : ses six racines sont + 1, — 1, — 2, + 3, $+ i$, $- i$.

2° Déterminer les racines entières de l'équation

$$2x^3 - 12x^2 + 13x - 15 = 0.$$

La transformée en $- x$ ne présentant pas de variation, l'équation proposée n'a pas de racine négative. On n'essayera donc que des nombres positifs. Après avoir reconnu

que 1 n'est pas racine, on essayera les diviseurs de 15. Voici le tableau des opérations :

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 - 12x^2 + 13x - 15 = 0 & \\ \qquad\qquad\qquad -5 & +3 \\ \qquad -2 \ +2 - 3 & +5 \end{array}$$

Le nombre 5 est racine : en divisant par $x - 5$, on a l'équation

$$2x^2 - 2x + 3 = 0,$$

qui a ses racines imaginaires.

200. Remarque I. On diminue le nombre des essais en cherchant des limites supérieures des racines positives et des racines négatives, comme nous l'avons expliqué précédemment (n° 185).

Considérons l'équation

$$x^5 - 6x^4 - 5x^3 + 58x^2 - 144 = 0.$$

Si l'on partage l'équation en deux groupes

$$x^3(x^2 - 6x - 5) + (58x^2 - 144) = 0,$$

on voit que 7 est une limite supérieure des racines de l'équation. Si l'on change le signe de x, l'équation devient

$$x^5 + 6x^4 - 5x^3 - 58x^2 + 144 = 0;$$

on l'écrira

$$x^2(x^3 + 6x^2 - 5x - 58) + 144 = 0.$$

Le nombre 3, rendant positif le premier groupe, est une limite supérieure des racines positives de cette équation. Ainsi toutes les racines réelles de l'équation proposée sont comprises entre -3 et $+7$.

D'après cela, si l'on veut chercher les racines entières de

l'équation proposée, il suffira d'essayer les diviseurs de 144 qui sont compris entre -3 et $+7$. On trouve d'abord les racines -2 et $+3$, ce qui réduit l'équation à

$$x^3-5x^2-4x+24=0.$$

Les nombres $+4$ et $+6$ ne sont pas racines; il est inutile de pousser les essais au delà; il est certain que cette dernière équation n'a plus de racine entière.

201. Remarque II. On diminue encore d'une autre manière le nombre des essais. Appelons $f(x)$ le premier membre d'une équation ayant ses coefficients entiers, et a une racine entière; le polynôme $f(x)$ est divisible par $x-a$, et le quotient $f_1(x)$ a aussi ses coefficients entiers. Si dans l'égalité

$$\frac{f(x)}{x-a}=f_1(x)$$

on remplace x par un nombre entier quelconque α, on aura

$$\frac{f(\alpha)}{a-\alpha}=-f_1(\alpha).$$

Le second membre étant un nombre entier, on en conclut que le nombre entier $f(\alpha)$ est divisible par le nombre entier $a-\alpha$.

Le nombre entier α est arbitraire. Si l'on fait $\alpha=1$ ou $\alpha=-1$, on voit que $f(1)$ est divisible par $a-1$ et $f(-1)$ par $a+1$. Les deux résultats $f(1)$ et $f(-1)$ ont été trouvés, lorsqu'on a essayé $+1$ et -1; avant d'appliquer au nombre entier a la règle ordinaire, on examinera si $f(1)$ est divisible par $a-1$ et $f(-1)$ par $a+1$, ce qui réduira beaucoup le nombre des essais.

Considérons, par exemple, l'équation

$$x^5-4x^4-101x^3+14x^2+504x+576=0,$$

dont les racines réelles sont comprises entre -9 et $+15$. On a $f(1)=990$, $f(-1)=182$. Prenons les diviseurs de 576 compris entre -9 et $+15$. Le nombre $2+1$ ou 3 ne divise pas $f(-1)$; donc 2 n'est pas racine. Le nombre -2 satisfaisant aux conditions énoncées, on essayera ce nombre. Le nombre $3+1$ ou 4 ne divisant pas $f(-1)$, on rejettera $+3$. Le nombre $-3-1$ ou -4 ne divisant pas $f(1)$, on rejettera aussi -3. On rejettera de même $+4$, -4, -6, $+8$, $+9$. On n'aura donc à essayer que les quatre diviseurs -2, $+6$, -8, $+12$. Voici le tableau des opérations :

x^5	$-4x^4$	$-101x^3$	$+14x^2$	$+504x$	$+576$	
		$+27$	$+47$	-108	-288	-2
			$+19$	$+100$	$+96$	$+6$
	-1	$+12$	$+5$	-54	-72	-8
	x^4	$-12x^3$	$-5x^2$	$+54x$	$+72$	
					-9	-8
		-1	0	$+5$	$+6$	$+12$

$$x^3-5x-6=0.$$

On trouve les deux racines entières -8 et $+12$; l'équation du troisième degré à laquelle on réduit l'équation proposée n'a plus de racines entières.

Recherche des racines commensurables fractionnaires.

202. Nous supposons toujours que l'équation

(1) $$A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots\ldots + A_{m-1}x + A_m = 0$$

a ses coefficients entiers. Une racine commensurable quelconque pourra être mise sous la forme d'une fraction irré-

ductible $\frac{a}{b}$, et l'on aura

$$A_0 \frac{a^m}{b^m} + A_1 \frac{a^{m-1}}{b^{m-1}} + \ldots\ldots + A_{m-1} \frac{a}{b} + A_m = 0.$$

Si l'on multiplie par b^{m-1}, cette relation devient

$$\frac{A_0 a^m}{b} = -(A_1 a^{m-1} + A_2 b a^{m-2} + \ldots\ldots + A_m b^{m-1});$$

le second membre étant entier, le premier doit l'être aussi; mais b est premier avec a et par suite avec a^m; donc b divise A_0. Ainsi, *toute racine commensurable a pour dénominateur un diviseur du premier coefficient de l'équation.*

En multipliant par b^m et divisant par a, on a de même

$$\frac{A_m b^m}{a} = -(A_0 a^{m-1} + A_1 b a^{m-2} + \ldots\ldots + A_{m-1} b^{m-1});$$

le second membre étant entier, le premier l'est aussi; or a est premier avec b^m; donc a divise A_m. Ainsi *le numérateur est un diviseur du dernier coefficient de l'équation.*

203. Il résulte de là qu'*une équation à coefficients entiers, dont le premier coefficient est l'unité, n'a pas de racine commensurable fractionnaire.* En effet, le dénominateur d'une racine commensurable, devant diviser le premier coefficient qui est l'unité, est lui-même égal à un, et par conséquent la racine est entière. Ainsi, dans ce cas, toutes les racines commensurables sont entières.

Ceci nous donne un moyen facile de ramener la recherche des racines commensurables fractionnaires à celle des racines entières. On conçoit, en effet, que si l'on multiplie par un nombre entier convenable les racines de l'équation proposée, on rendra entières toutes les racines commen-

surables fractionnaires. Posons donc $x' = kx$, d'où $x = \frac{x'}{k}$, et dans l'équation proposée remplaçons x par $\frac{x'}{k}$, nous obtiendrons la nouvelle équation

$$\frac{A_0 x'^m}{k^m} + \frac{A_1 x'^{m-1}}{k^{m-1}} + \frac{A_2 x'^{m-2}}{k^{m-2}} + \ldots\ldots + A_m = 0.$$

Déterminons maintenant le nombre entier k de manière qu'en chassant les dénominateurs pour rendre les coefficients entiers, on réduise en même temps le premier coefficient à l'unité. Cette opération réussira toujours quand on prendra $k = A_0$; en effet, si l'on multiplie par k^{m-1}, on met l'équation sous la forme

$$\frac{A_0}{k} x'^m + A_1 x'^{m-1} + A_2 k x'^{m-2} + \ldots\ldots + A_m k^{m-1} = 0;$$

si $k = A_0$, cette équation devient

$$(2) \qquad x'^m + A_1 x'^{m-1} + A_2 A_0 x'^{m-2} + \ldots\ldots + A_m A_0^{m-1} = 0.$$

Cette dernière équation, dont les coefficients sont entiers et le premier coefficient égal à l'unité, a toutes ses racines commensurables entières. Nous avons posé $x = \frac{x'}{k}$, c'est-à-dire que les racines de l'équation (1) sont égales à celles de l'équation (2) divisées par k; ainsi, quand on aura trouvé les racines entières de l'équation transformée (2), en les divisant par k, on obtiendra toutes les racines commensurables de l'équation proposée.

On comprend pourquoi l'opération réussit toujours quand on prend $k = A_0$; les racines commensurables ayant pour dénominateurs des diviseurs de A_0, il est clair que ces racines, multipliées par A_0, deviennent toutes entières.

Lorsqu'il s'agit de trouver les racines commensurables d'une équation, on commence par chercher les racines entières, et, s'il y en a, on divise l'équation par les facteurs premiers correspondants. On détermine ensuite les racines fractionnaires à l'aide des racines entières de l'équation (2) : mais, dans la recherche des racines entières de cette dernière équation, il est inutile de pousser les essais jusqu'au dernier terme ; car la plus grande racine commensurable fractionnaire de l'équation proposée étant au plus égale à A_m divisé par le plus petit diviseur de A_0, la plus grande racine entière de l'équation (2) sera au plus égale à k fois celle-ci ; on s'arrêtera à cette limite.

Exemples.

1° Trouver les racines commensurables de l'équation

$$(1) \qquad 2x^4 + x^3 - 10x^2 - 2x + 12 = 0.$$

On trouve d'abord la racine entière -2 ; divisant par $x + 2$, l'équation se réduit à

$$(2) \qquad 2x^3 - 3x^2 - 4x + 6 = 0.$$

Cette équation n'ayant plus de racine entière, on la transorme en remplaçant x par $\frac{x}{2}$, ce qui donne

$$(3) \qquad x^3 - 3x^2 - 8x + 24 = 0.$$

Les racines fractionnaires de l'équation (2) ne pouvant être que $\pm \frac{1}{2}$ et $\pm \frac{3}{2}$, on cherchera les racines entières de l'équation (3) seulement parmi les nombres ± 1 et ± 3 ; on trouve que $+ 3$ est racine ; ainsi l'équation proposée

admet la racine fractionnaire $\frac{3}{2}$. La dernière équation divisée par $x-3$ conduit à l'équation du second degré

$$x^2-8=0$$

qui a deux racines incommensurables $\pm 2\sqrt{2}$, d'où résultent pour l'équation proposée les racines incommensurables $\pm\sqrt{2}$. Ainsi les quatre racines de l'équation proposée sont -2, $\frac{3}{2}$, $+\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$.

2° L'équation

$$(1) \qquad 4x^4-28x^3+45x^2-6x-18=0$$

n'a pas de racine entière. Si l'on remplace x par $\frac{x}{k}$, et si l'on multiplie par k^4, elle devient

$$\frac{4x^4}{k^2}-\frac{28x^3}{k}+45x^2-6kx-18k^2=0;$$

pour opérer la transformation, il suffit de prendre $k=2$, ce qui donne

$$(2) \qquad x^4-14x^3+45x^2-12x-72=0.$$

Les racines fractionnaires de l'équation proposée, devenant entières quand on les multiplie par 2, ne peuvent être que $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{3}{2}$, $\pm\frac{9}{2}$; on essayera donc ± 1, ± 3, ± 9.

L'équation (2) admet la racine -1; la division par $x+1$ donne l'équation

$$x^3-15x^2+60x-72=0.$$

Cette dernière admet la racine 3; la division par $x-3$ conduit à l'équation du second degré

$$x^2-12x+24=0,$$

dont les racines $x = 6 \pm \sqrt{12}$ sont incommensurables. Ainsi les quatre racines de l'équation proposée sont $-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 5 \pm \sqrt{5}$.

204. Deuxième méthode. Il est à remarquer que lorsqu'une équation

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots\ldots + A_{m-1} x + A_m = 0$$

a ses coefficients entiers et que l'on divise le premier membre par le facteur binôme $x - \frac{a}{b}$, qui correspond à une racine commensurable fractionnaire $\frac{a}{b}$, le quotient a aussi ses coefficients entiers. Supposons que l'on effectue la division en ordonnant par rapport aux puissances décroissantes de x, comme nous l'avons expliqué au n° 168. Le premier coefficient du quotient est A_0, on obtient le second en multipliant le premier par $\frac{a}{b}$ et ajoutant A_1; le troisième en multipliant le second par $\frac{a}{b}$ et ajoutant A_2, et ainsi de suite. Si les coefficients du quotient ne sont pas entiers, ils ne pourront contenir à leurs dénominateurs que les facteurs premiers de b.

Supposons maintenant que l'on divise le polynôme par $\frac{a}{b} - x$, en ordonnant par rapport aux puissances croissantes de x (n° 199). On obtient le premier coefficient du quotient en divisant A_m par $\frac{a}{b}$, ce qui revient à multiplier par $\frac{b}{a}$. Si à ce premier coefficient on ajoute A_{m-1} et si l'on multiplie par

$\frac{b}{a}$, on a le second coefficient du quotient, et ainsi de suite. On en conclut que, si les coefficients du quotient ne sont pas entiers, ils ne pourront contenir à leurs dénominateurs que les facteurs premiers de a. Mais nous avons déjà vu que ces mêmes dénominateurs ne peuvent contenir que les facteurs premiers de b; comme a et b sont premiers entre eux, tous les dénominateurs se réduisent à l'unité, et par conséquent les coefficients du quotient sont entiers.

Non-seulement les coefficients du quotient son entiers, mais encore ils sont tous divisibles par b. Car, si l'on désigne par A_0, B_1, B_2, ... les coefficients du quotient ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x, on a

$$B_1 = \frac{A_0 a}{b} + A_1,$$

$$B_2 = \frac{B_1 a}{b} + A_2,$$

$$B_3 = \frac{B_2 a}{b} + A_3,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Pour que B_1 soit entier, il faut que b divise A_0, ce que l'on sait déjà. Pour que B_2 soit entier, il faut que b divise B_1, et ainsi de suite.

Les deux manières d'effectuer la division peuvent être appliquées pour l'essai direct des racines commensurables fractionnaires. On choisira l'une ou l'autre, suivant les cas.

Exemples.

1° Reprenons l'équation

$$4x^4 - 28x^3 + 45x^2 - 6x - 18 = 0,$$

dont il a déjà été question. Après avoir reconnu que cette

équation n'a pas de racine entière, cherchons les racines fractionnaires. Essayons d'abord $\frac{1}{2}$; si nous calculions le quotient de droite à gauche, comme pour les racines entières, il faudrait diviser successivement par $\frac{1}{2}$, ce qui revient à multiplier par 2; toutes les opérations seraient possibles, et il faudrait aller jusqu'au bout pour voir si le reste est nul. Au contraire, en calculant de gauche à droite, il faut multiplier successivement par $\frac{1}{2}$, ce qui revient à diviser par 2; nous emploierons donc de préférence ce second procédé: 4 multiplié par $\frac{1}{2}$ donne 2, et —28.....—26; —26 multiplié par $\frac{1}{2}$ donne —13 et +45..... +32; +32 multiplié pas $\frac{1}{2}$ donne +16 et —6..... +10; +10 multiplié par $\frac{1}{2}$ donne +5 et —18.....—13. Il arrive ici que l'opération se prolonge jusqu'à la fin; mais le reste —13 n'est pas nul; donc $\frac{1}{2}$ n'est pas racine.

Essayant $-\frac{1}{2}$ de la même manière, toutes les opérations sont possibles, et l'on arrive à un reste nul; donc $-\frac{1}{2}$ est racine, et l'on a le quotient

$$4x^3 - 30x^2 + 60x - 36 = 0,$$

ou, en divisant tous les termes par 2,

$$2x^3 - 15x^2 + 30x - 18 = 0.$$

Après avoir essayé encore une fois $-\frac{1}{2}$, on essayera $\frac{3}{2}$, mais en allant de droite à gauche : -18 divisé par $\frac{3}{2}$ donne -12 ; ajoutant $+30$ on a $+18$ qui, divisé par $\frac{3}{2}$, donne $+12$; ajoutant -15 on a -3 qui, divisé par $\frac{3}{2}$, donne -2 ; ajoutant le premier coefficient $+2$, on obtient un résultat égal à zéro. Donc $\frac{3}{2}$ est racine, et le quotient de la division par $x-\frac{3}{2}$ est

$$2x^2 - 12x + 12 = 0,$$

ou

$$x^2 - 6x + 6 = 0.$$

Cette équation du second degré donne deux racines incommensurables.

2° Trouver les racines commensurables de l'équation

$$15x^4 + 16x^3 - 46x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Après avoir reconnu que cette équation n'a pas de racine entière, on essayera la fraction $\frac{1}{3}$ en allant de gauche à droite, et l'on verra que cette fraction est racine. Dans l'équation simplifiée, on essayera les fractions $\pm\frac{1}{5}$, $\pm\frac{2}{5}$, et l'on verra que $-\frac{2}{5}$ est racine. L'équation à laquelle on arrive, ayant son premier coefficient égal à l'unité, n'a plus de racine commensurable. Voici le tableau des calculs :

$15x^4+16x^3-46x^2-5x+6=0$	
$15,\ +21,\ -39,\ -18,\ 0$	$\frac{1}{3}$
$5x^3+7x^2-13x-6=0$	
$5,\ +8$	$\frac{1}{5}$
$5,\ +6$	$-\frac{1}{5}$
$5,\ +9$	$\frac{2}{5}$
$5,\ +5,\ -15,\ 0$	$-\frac{2}{5}$
$x^2+x-3=0.$	

205. Remarque I. Nous avons expliqué (n° 198) par quelle suite d'opérations, étant donné un polynôme X, on peut trouver des polynômes X_1, X_2, X_3, ... formés, le premier des facteurs simples du polynôme proposé, le second des facteurs doubles, le troisième des facteurs triples, etc. Ces opérations consistant en divisions, il est clair que si le polynôme proposé X a ses coefficients commensurables, les polynômes X_1, X_2,....., qu'on en déduit, auront aussi leurs coefficients commensurables. Supposons que le polynôme X n'ait qu'une racine a d'un même degré n de multiplicité; le polynôme X_n sera du premier degré, et par conséquent la racine a fournie par l'équation du premier degré $X_n=0$, à coefficients commensurables, sera commensurable. Ainsi, *quand une équation à coefficients commensurables a une seule racine d'un même degré de multiplicité, cette racine est commensurable.*

206. Remarque II. Lorsqu'une équation du troisième degré admet des racines égales, elle a, ou une racine double

et une simple, ou une racine triple; dans les deux cas, d'après ce qui a été dit précédemment, les racines sont commensurables.

Lorsqu'une équation du quatrième degré admet des racines égales, elle a, ou une racine double et deux racines simples, ou deux racines doubles, ou une racine triple et une racine simple, ou une racine quadruple. Dans le premier cas, la racine double est commensurable; dans le troisième cas, la racine triple et la racine simple le sont également, et de même dans le quatrième cas la racine quadruple. Mais, dans le second cas, les deux racines doubles, étant données par une équation du second degré, sont en général incommensurables.

Lorsqu'une équation du cinquième degré admet des racines égales, elle a ou une racine double et trois simples, ou deux racines doubles et une simple, ou une racine d'un degré égal ou supérieur à trois; dans tous ces cas, l'une au moins des racines est commensurable.

Ainsi, *quand une équation à coefficients commensurables, et d'un degré égal ou inférieur à cinq, a des racines égales, cette équation a au moins une racine commensurable, excepté quand le polynôme est du quatrième degré et carré parfait.*

Tant que le degré de l'équation ne surpasse pas cinq, on peut donc se dispenser d'appliquer à l'équation la méthode des racines égales, qui exige en général de longs calculs; après avoir reconnu que le polynôme n'est pas carré parfait, on appliquera à l'équation la méthode des racines commensurables. Mais quand l'équation est d'un degré plus élevé, elle peut avoir des racines égales sans avoir des racines commensurables.

Exercices.

1° Appliquer la méthode des racines égales aux équations

$$x^8-7x^7-2x^6+118x^5-259x^4-83x^3+612x^2-108x-432=0,$$
$$x^9+2x^8+x^7+6x^6+7x^5-2x^4+3x^3+2x^2-12x-8=0,$$
$$x^4-8x^3+24x^2-32x+16=0.$$

2° Chercher les racines commensurables des équations

$$x^5+5x^4+x^3-16x^2-20x-16=0,$$
$$2x^3-53x+105=0,$$
$$6x^6-19x^5+13x^4-20x^3+48x^2-16=0,$$
$$15x^4+16x^3-46x^2-5x+6=0.$$

CHAPITRE V.

NOMBRE DES RACINES RÉELLES.

Théorème de Rolle.

207. Théorème. ***Deux racines réelles consécutives d'un polynôme entier comprennent au moins une racine réelle de la dérivée.***

Soient a et b deux racines réelles consécutives d'un polynôme entier $f(x)$ à coefficients réels; dans l'intervalle, le polynôme conserve toujours le même signe, par exemple le signe $+$, sans quoi il y aurait une autre racine entre a et b. Supposons a plus petit que b et faisons croître x de a et

b d'une manière continue; la fonction $f(x)$ part de zéro et devient positive, c'est-à-dire plus grande que zéro; donc elle commence par croître, et la dérivée est positive pour des valeurs de x voisines de a; la fonction $f(x)$, qui reste constamment positive, arrive ensuite à zéro en décroissant, et par conséquent la dérivée est négative pour des valeurs de x voisines de b. Ainsi quand x varie de a à b, la dérivée a des valeurs de signes contraires dans le voisinage de a et dans le voisinage de b; comme elle est elle-même finie et continue, elle s'annule au moins une fois dans l'intervalle de a à b. En général cet intervalle comprendra un nombre impair de racines réelles de la dérivée.

Ce théorème est vrai pour les fonctions continues quelconques, pourvu que la dérivée soit elle-même finie et continue. Nous nous sommes servi de cette propriété pour la démonstration de la série de Taylor (n° 136).

208. Corollaire. *Deux racines réelles consécutives de la dérivée ne comprennent pas plus d'une racine réelle du polynôme proposé.* Car si deux racines réelles consécutives a' et b' de la dérivée comprenaient deux racines réelles a et b du polynôme proposé, ces deux racines réelles a et b comprendraient elles-mêmes une racine de la dérivée, ce qui est impossible.

Mais il n'est pas certain qu'entre les deux racines consécutives a' et b' de la dérivée, il y ait une racine du polynôme proposé. Pour décider la question, il suffira de substituer a' et b' à la place de x dans le polynôme; si l'on obtient deux résultats de même signe, il n'y a aucune racine dans l'intervalle; si l'on obtient deux résultats de signes contraires, il y a une racine. Soient $a', b', c', \ldots, h'$ les racines réelles de la dérivée $f'(x)$ rangées par ordre de gran-

deur croissante. Dans le polynôme $f(x)$ substituons la suite des quantités

$$-\infty,\ a',\ b',\ c',\ldots\ldots h',\ +\infty$$

et examinons les signes des résultats. Chacun des intervalles comprendra zéro ou une racine du polynôme $f(x)$, suivant que les résultats seront de même signe ou de signes contraires. Ainsi, *quand on sait résoudre la dérivée, on peut trouver le nombre des racines réelles de l'équation proposée.*

Si n est le nombre des racines réelles de la dérivée, le nombre des intervalles étant $n+1$, on en conclut que l'équation proposée admet au plus $n+1$ racines réelles.

Équations du troisième degré.

209. Considérons l'équation du troisième degré

$$x^3 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3 = 0.$$

Si l'on égale à zéro la dérivée, on obtient une équation du second degré

$$3x^2 + 2A_1 x + A_2 = 0.$$

Pour que l'équation proposée ait ses trois racines réelles, il faut d'abord que la dérivée ait ses racines réelles. Appelons a' la plus petite racine de la dérivée, b' la plus grande, et substituons dans le polynôme du troisième degré la suite des quantités

$$-\infty,\quad a',\quad b',\quad +\infty.$$

Pour $x = -\infty$, on a un résultat négatif, pour $x = +\infty$ un résultat positif; si a' donne un résultat positif, b' un résultat négatif, chacun des intervalles, présentant un changement

de signe, comprendra une racine réelle et l'équation du troisième degré aura ses trois racines réelles.

210. Mais nous réduirons d'abord l'équation à une forme plus simple. On peut toujours, par une transformation facile, faire disparaître le second terme d'une équation. Soit l'équation

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots\ldots + A_m = 0.$$

Posons $x = y + k$; l'équation devient

$$(y+k)^m + A_1(y+k)^{m-1} + \ldots\ldots = 0,$$

ou

$$y^m + (mk + A_1)y^{m-1} + \ldots\ldots = 0.$$

Si l'on fait $k = -\frac{A_1}{m}$, le coefficient du second terme s'évanouit, et l'équation prend la forme

$$y^m + B_2 y^{m-2} + B_3 y^{m-3} + \ldots\ldots + B_m = 0.$$

Il est aisé de prévoir ce résultat. La relation $y = x - k$ signifie que les racines de la nouvelle équation sont égales aux racines de l'équation proposée diminuées chacune de la quantité constante k; la somme des racines de la seconde équation est égale à la somme des racines de la première, c'est-à-dire à $-A_1$, moins mk; si donc on fait $k = -\frac{A_1}{m}$, cette somme est nulle, et par conséquent le coefficient du second terme est nul.

Pour réduire l'équation du troisième degré, on posera $x = y - \frac{A_1}{3}$, et l'on ramènera ainsi l'équation à la forme plus simple

$$x^3 + px + q = 0$$

Par cette transformation, quand les coefficients sont réels, les racines réelles restent réelles, les racines imaginaires restent imaginaires.

211. Cherchons maintenant la condition pour que l'équation

$$x^3 + px + q = 0$$

ait ses trois racines réelles. L'équation

$$3x^2 + p = 0$$

devant avoir ses deux racines réelles, il faut que le coefficient p soit négatif; supposons cette condition remplie; nous aurons

$$a' = -\sqrt{-\frac{p}{3}}, \quad b' = \sqrt{-\frac{p}{3}}.$$

On doit avoir en outre $f(a') > 0$, c'est-à-dire

$$-\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)^3 - p\sqrt{-\frac{p}{3}} + q > 0,$$

ou

(1) $$-\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} > -\frac{q}{2}.$$

La condition $f(b') < 0$ se déduira de la précédente en changeant le signe du radical et le sens de l'inégalité, ce qui donne

$$\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} < -\frac{q}{2},$$

ou

(2) $$-\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} > \frac{q}{2}.$$

Le coefficient p étant négatif, les premiers membres de ces inégalités sont des quantités positives. Supposons $q > 0$; l'inégalité (1), ayant son second membre négatif, sera toujours satisfaite; l'inégalité (2) ayant ses deux membres positifs, on peut les élever au carré, et l'on en déduit

$$-\left(\frac{p}{3}\right)^3 > \left(\frac{q}{2}\right)^2,$$

ou

(3) $$\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 < 0.$$

Supposons maintenant $q < 0$; c'est l'inégalité (2) qui est toujours vérifiée, et l'inégalité (1) conduit à la même inégalité (3). D'ailleurs l'inégalité (3) ne peut être satisfaite que si le coefficient p est négatif.

Ainsi, *pour que l'équation*

$$x^3 + px + q = 0$$

ait ses trois racines réelles, il est nécessaire et il suffit que ses coefficients satisfassent à l'inégalité

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 < 0.$$

Quand le premier membre de cette inégalité est une quantité positive, l'équation n'a qu'une racine réelle. Quand cette quantité est nulle, l'équation a deux racines égales, comme nous l'avons vu au n° 197.

Exemples.

1° L'équation

$$x^3 + 5x - 2 = 0,$$

dans laquelle le coefficient du second terme est positif, n'a qu'une racine réelle; cette racine est positive.

2° L'équation

$$x^3 - 6x + 4 = 0$$

a ses trois racines réelles. La transformée en $-x$ n'ayant qu'une variation, une seule racine est négative, les deux autres sont positives.

3° L'équation

$$x^3 - 6x + 6 = 0$$

n'a qu'une racine réelle. Cette racine est négative.

4° Déterminer les dimensions d'un cylindre circulaire droit, dont on connaît la surface totale et le volume.

Désignons la surface par $4\pi a^2$ et le volume par $\frac{4\pi b^3}{3}$, appelons x le rayon de la base et y la hauteur. On a les deux équations

$$(1) \qquad y = \frac{4b^3}{3x^2}, \qquad (2) \qquad x^3 - 2a^2x + \frac{4b^3}{3} = 0.$$

L'équation (2) admet toujours une racine négative, qui ne convient pas à la question. Pour que le problème soit possible, il faut que l'équation ait une racine positive, et par conséquent ses trois racines réelles; la condition est

$$b^3 < a^3 \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Quand cette condition est remplie, l'équation a deux racines positives auxquelles correspondent des valeurs positives de y, et le problème admet deux solutions. Quand $b^3 = a^3 \sqrt{\frac{2}{3}}$, ces deux solutions se confondent en une seule.

Équations du quatrième degré.

212. Si l'on fait disparaître le second terme, l'équation du quatrième degré se ramène à la forme

(1) $$x^4 + Ax^2 + Bx + C = 0.$$

Posons $x = \frac{1}{y}$; l'équation devient

(2) $$Cy^4 + By^3 + Ay^2 + 1 = 0.$$

En égalant à zéro la dérivée, on obtient l'équation

$$4Cy^3 + 3By^2 + 2Ay = 0,$$

ou

$$y(4Cy^2 + 3By + 2A) = 0,$$

que l'on peut résoudre. On saura donc reconnaître combien l'équation (2), et par suite combien l'équation proposée, admet de racines réelles.

Soit, par exemple, l'équation

(3) $$x^4 - 2x^2 - 2x + 1 = 0,$$

que l'on ramène à l'équation

(4) $$y^4 - 2y^3 - 2y^2 + 1 = 0,$$

en posant $x = \frac{1}{y}$. La dérivée

$$2y(2y^2 - 3y - 2) = 0$$

a ses trois racines réelles $-\frac{1}{2}$, 0, $+2$. Les quantités

$$-\infty, \quad -\frac{1}{2}, \quad 0, \quad +2, \quad +\infty,$$

substituées dans le polynôme (h), donnent les signes

$$+, \ +, \ +, \ -, \ +.$$

On en conclut que l'équation (h) a deux racines réelles et comprises, l'une entre o et 2, l'autre entre 2 et $+\infty$. L'équation proposée admet aussi deux racines réelles et comprises, l'une entre o et $\frac{1}{2}$, l'autre $\frac{1}{2}$ et $+\infty$.

213. On peut ramener la résolution d'une équation du quatrième degré à celle d'une équation du troisième degré.

Un polynôme du quatrième degré est le produit de quatre facteurs du premier degré $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$. Le produit $(x-a)(x-b)$ de deux facteurs quelconques du premier degré donne un facteur du second degré x^2+px+q; le polynôme du quatrième degré admet donc six facteurs du second degré, et par conséquent les coefficients p et q ont six valeurs; la recherche de ces coefficients dépend donc d'une équation du sixième degré. Mais, si l'on met l'équation proposée sous la forme

$$(1) \qquad x^4+Ax^2+Bx+C=0,$$

on a $a+b+c+d=0$, d'où $a+b=-(c+d)$; les valeurs de p sont égales deux à deux et de signes contraires; l'équation du sixième degré, qui donne l'inconnue p, ne contiendra donc que des puissances paires de p, et par conséquent s'abaissera au troisième degré.

Quand on divise le polynôme x^4+Ax^2+Bx+C par x^2+px+q, on obtient un quotient du second degré $x^2-px+(A+p^2-q)$, et un reste du premier degré

$$[B+2pq-p(A+p^2)]x+[C-q(A+p^2-q)].$$

Ce reste devant être identiquement nul, on a les deux équations

$$B + 2pq - p(A + p^2) = 0,$$
$$C - q(A + p^2 - q) = 0.$$

De la première on déduit

$$(2) \qquad q = \frac{p(A + p^2) - B}{2p};$$

cette valeur substituée dans la seconde donne l'équation

$$(3) \qquad p^2(A + p^2)^2 - 4Cp^2 - B^2 = 0.$$

Si l'on pose $p^2 = z$, cette équation s'abaisse au troisième degré

$$(4) \qquad z(z + A)^2 - 4Cz - B^2 = 0.$$

Lorsque l'équation (1), dont nous supposons les coefficients réels, a ses quatre racines réelles, l'équation (4) a ses trois racines réelles et positives. Quand l'équation (1) a ses quatre racines imaginaires, l'équation (4) a encore ses trois racines réelles; l'une est positive, les deux autres négatives. Mais lorsque l'équation (1) a deux racines réelles et inégales et deux imaginaires, l'équation (4) a une racine réelle positive et deux imaginaires. Pour résoudre complétement l'équation (1), il suffit de calculer l'une des racines de l'équation (4) ; à cette valeur de p correspond une valeur de q donnée par l'équation (2) ; on connaît alors deux facteurs du second degré, le diviseur et le quotient. On résoudra donc les deux équations du second degré

$$x^2 + px + q = 0$$
$$x^2 - px + (A + p^2 - q) = 0.$$

Équations trinômes.

214. La méthode, dont nous avons fait usage pour trouver le nombre des racines réelles de l'équation du troisième degré, s'applique à l'équation trinôme

$$(1)\qquad x^m + Ax^n + B = 0.$$

Si l'on prend la dérivée, on obtient l'équation

$$mx^{m-1} + nAx^{n-1} = 0,$$

ou

$$(2)\qquad x^{n-1}(mx^{m-n} + nA) = 0,$$

dont on sait trouver les racines réelles.

On peut aussi l'appliquer à l'équation

$$(3)\qquad x^m + Ax^{m-n} + Bx^{m-2n} + C = 0;$$

car si l'on prend la dérivée, on obtient l'équation

$$mx^{m-1} + (m-n)Ax^{m-n-1} + (m-2n)Bx^{m-2n-1} = 0,$$

ou

$$(4)\qquad x^{m-2n-1}[mx^{2n} + (m-n)Ax^n + (m-2n)B] = 0,$$

que l'on peut résoudre.

On ramène l'équation

$$x^m + Ax^{2n} + Bx^n + C = 0$$

à la forme précédente, en posant $x = \frac{1}{y}$.

Théorème de Sturm.

215. Quand on sait résoudre la dérivée, le théorème de Rolle suffit pour trouver le nombre des racines réelles d'une

équation. Mais quand on ne sait pas résoudre la dérivée, ce théorème est insuffisant. On peut recourir alors au théorème de Sturm qui donne, dans tous les cas, le moyen de trouver exactement le nombre des racines réelles d'une équation algébrique comprises entre deux nombres donnés.

Soit $f(x)$ un polynôme entier à coefficients réels, a une racine réelle de ce polynôme; on peut déterminer un nombre positif h assez petit pour que l'intervalle de $a-h$ à $a+h$ ne comprenne aucune racine du polynôme et de sa dérivée, autre que a. Nous démontrerons d'abord que si l'on fait varier x de $a-h$ à $a+h$, *le polynôme et sa dérivée ont des valeurs de signes contraires avant la racine et des valeurs de même signe après la racine.*

En effet, faisons varier x de a à $a+h$; si la fonction $f(x)$ prend des valeurs positives, comme elle part de zéro, elle va en croissant et sa dérivée est aussi positive; si elle prend des valeurs négatives, elle va au contraire en décroissant et sa dérivée est aussi négative. Ainsi, quand x varie de a à $a+h$, la fonction et sa dérivée ont le même signe. Faisons maintenant varier x de $a-h$ à a; si la fonction $f(x)$ est négative, comme elle arrive à zéro, elle va en croissant, et sa dérivée est positive. Si elle est positive, elle va au contraire en décroissant et sa dérivée est négative. Ainsi, quand x varie de $a-h$ à a, la fonction et sa dérivée ont des signes contraires.

216. *Cas où l'équation n'a pas de racines égales.* Considérons d'abord le cas où le polynôme $f(x)$ n'a que des racines simples. Désignons par X ce polynôme ordonné suivant les puissances décroissantes de x et par X_1 sa dérivée. Divisons X par X_1; appelons Q_1 le quotient et X_2 le reste changé de signe. Divisons X_1 par X_2; appelons Q_2 le quotient et X_3 le reste changé de signe, et ainsi de suite.

Cette série d'opérations est celle que l'on effectue pour trouver le plus grand commun diviseur entre les polynômes X et X_1; ces polynômes étant premiers entre eux, après un certain nombre de divisions on arrivera à un reste indépendant de x; appelons X_p ce dernier reste changé de signe. On a ainsi

$$\begin{aligned} X &= X_1 Q_1 - X_2 \\ X_1 &= X_2 Q_2 - X_3 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots \\ X_{p-2} &= X_{p-1} Q_{p-1} - X_p. \end{aligned}$$

Considérons la suite des polynômes

$$X,\ X_1,\ X_2,\ \ldots\ldots,\ X_p.$$

Nous allons démontrer que si dans cette suite on donne à x successivement deux valeurs réelles particulières x_0 et x_1, x_0 étant inférieure à x_1, et que l'on compte les variations que présentent les deux suites de quantités, *le nombre des variations perdues, quand on passe de* x_0 *à* x_1, *indique exactement le nombre des racinee réelles comprises dans cet intervalle.*

Faisons croître x d'une manière continue de x_0 et x_1; une modification dans le nombre des variations ne pourra s'opérer que si l'un des polynômes change de signe, et par conséquent passe par zéro. Nous remarquons d'abord que deux polynômes consécutifs X_{n-1} et X_n ne peuvent s'annuler pour une même valeur de x; car si cela avait lieu, en vertu de la relation

$$X_{n-1} = X_n Q_n - X_{n+1},$$

le polynôme suivant X_{n+1} s'annulerait aussi, et de même

X_{n+2}, X_{n+3}, ..., X_p, ce qui est impossible, puisque X_p est indépendant de x.

Supposons qu'un polynôme intermédiaire X_n change de signe, quand x passe par la valeur a, les deux polynômes X_{n-1} et X_{n+1} ont des valeurs différentes de zéro, et ces valeurs sont de signes contraires; car pour $x=a$, l'égalité précédente se réduit à

$$X_{n-1} = - X_{n+1}.$$

Or on peut prendre h assez petit pour que, x variant de $a-h$ à $a+h$, chacun des polynômes X_{n-1} et X_{n+1} conserve le même signe; ces deux polynômes auront donc des signes contraires dans tout cet intervalle. Quels que soient les signes du polynôme X_n pour $x = a - h$ et pour $x = a + h$, la suite des trois polynômes

$$X_{n-1},\ X_n,\ X_{n+1},$$

présentera évidemment, pour chacune de ces deux valeurs de x, une variation et une seule; seulement cette variation se sera déplacée d'un côté ou de l'autre. Ainsi, le nombre des variations que présente la suite des polynômes n'est pas modifié quand l'un des polynômes intermédiaires change de signe. D'ailleurs la dernière quantité X_p, qui est indépendante de x, conserve toujours le même signe. Le nombre des variations de la suite ne changera donc que si le premier polynôme X change de signe.

Mais nous avons vu que si x passe par une racine a du polynôme X, ce polynôme et sa dérivée X_1 ont des signes contraires un peu avant la racine, et le même signe un peu après; il y a donc une variation perdue en tête de la suite des polynômes. Il en est de même chaque fois que x passe par une des racines du polynôme. Ainsi le nombre des va-

riations perdues dans la suite des polynômes, quand on passe de la valeur x_0 à la valeur plus grande x_1, est égal au nombre des racines réelles comprises dans cet intervalle.

217. Si l'on veut avoir le nombre total des racines réelles du polynôme X, il faudra dans la suite des polynômes faire d'abord $x = -\infty$ et compter le nombre des variations, faire ensuite $x = +\infty$, et compter le nombre des variations; le nombre des variations perdues est égal au nombre des racines réelles. Mais nous savons que pour une valeur de x très-grande en valeur absolue, le signe de chaque polynôme est celui de son premier terme; on pourra donc, dans l'application de la méthode, remplacer chaque polynôme par son premier terme.

Cherchons les conditions pour qu'un polynôme entier X du degré m ait toutes ses racines réelles. Le degré des polynômes successifs allant en diminuant depuis m à zéro, le nombre des polynômes de la suite est au plus égal à $m+1$, et par conséquent le nombre des variations que présente la suite des polynômes pour une valeur particulière de x est au plus égal à m. Pour que le polynôme X ait ses m racines réelles, il faut que, pour $x = -\infty$, la suite des polynômes présente m variations, ce qui exige d'abord que la suite des polynômes soit complète, c'est-à-dire que le degré de chaque polynôme soit inférieur d'une unité au degré du polynôme précédent, et ensuite que tous les premiers termes soient précédés du même signe, par exemple du signe $+$, afin que, pour $x = -\infty$, deux polynômes consécutifs présentent une variation. Ces conditions sont d'ailleurs suffisantes; car, si elles sont remplies, la suite des polynômes ne présente plus aucune variation pour $x = +\infty$, et le nombre des variations perdues est bien m.

Considérons, par exemple, l'équation du troisième degré $x^3+px+q=0$. On a la suite des polynômes

$$X=x^3+px+q,$$
$$X_1=3x^2+p,$$
$$X_2=-\frac{2p}{3}x-q,$$
$$X_3=-\frac{4p^3+27q^2}{4p^2}.$$

L'équation aura ses trois racines réelles si la suite présente trois variations pour $x=-\infty$, et n'en présente plus aucune pour $x=+\infty$; ceci exige que l'on ait $p<0$ et $4p^3+27q^2<0$, et l'on retrouve ainsi la condition que nous avons déjà obtenue par le théorème de Rolle (n° 211).

218. Remarque I. Pour éviter les coefficients fractionnaires, on peut multiplier chaque dividende par un nombre constant, comme nous l'avons expliqué lors de la recherche du plus grand commun diviseur (n° 189); mais ici il faut avoir soin que le multiplicateur soit positif, afin de ne pas changer les signes des polynômes que l'on a à considérer. On peut de même diviser tous les termes d'un polynôme par un nombre positif.

Soit, par exemple, l'équation

$$X=x^5-5x^3+10x^2-15x+16=0.$$

En divisant par 5 la dérivée

$$5x^4-15x^2+20x-15,$$

on la remplacera par le polynôme plus simple

$$X_1=x^4-3x^2+4x-3.$$

Le reste de la première division est divisible par 2; en changeant les signes, on a

$$X_2=x^3-3x^2+6x-8.$$

La seconde division donne un reste du premier degré qui, changé de signe, est

$$X_3 = 2x - 7.$$

Dans la dernière division, pour éviter les coefficients fractionnaires, on multipliera le dividende trois fois successivement par 2; le reste, changé de signe, est

$$X_4 = -153.$$

La suite des polynômes présente deux variations pour $x = -\infty$, et une seule pour $x = +\infty$. Donc l'équation proposée n'a qu'une racine réelle, et cette racine est négative.

219. Remarque II. Lorsqu'après un certain nombre de divisions successives on arrive à un polynôme X_p, qui conserve le même signe pour toutes les valeurs de x, il est inutile de pousser plus loin le calcul; pour trouver le nombre des racines réelles comprises entre x_0 et x_1, on appliquera la règle énoncée à la suite des polynômes

$$X, X_1, X_2, \ldots\ldots X_p,$$

car le raisonnement suppose simplement que le dernier polynôme ne change pas de signe.

Considérons, par exemple, l'équation

$$X = x^5 - 3x^3 + x^2 - 8x - 10 = 0,$$

on a

$$X_1 = 5x^4 - 9x^2 + 2x - 8.$$

Les deux premières divisions donnent

$$X_2 = 6x^3 - 3x^2 + 32x + 50.$$
$$X_3 = 413x^2 + 636x + 346.$$

On reconnaît immédiatement que ce dernier polynôme, qui

est du second degré, a ses racines imaginaires, et par conséquent conserve toujours le signe de son premier terme. On s'arrêtera là. La suite des polynômes X, X_1, X_2, X_3, présente trois variations pour $x=-\infty$, une pour $x=0$, et n'en présente plus aucune pour $x=+\infty$; on en conclut que l'équation proposée admet trois racines réelles, deux négatives et une positive.

220. *Cas où l'équation a des racines égales.* Nous avons supposé jusqu'à présent que l'équation n'a pas de racines égales; si elle en avait, l'opération conduirait, non plus à un reste indépendant de x, mais à un reste nul; le dernier diviseur X_p serait le plus grand commun diviseur algébrique entre le polynôme X et sa dérivée X_1. Ce dernier polynôme X_p divise chacun des polynômes

$$X,\ X_1,\ X_2,\ \ldots\ldots\ X_{p-1},\ X_p;$$

si l'on conçoit ces divisions effectuées, les quotients forment une nouvelle suite de polynômes

$$Y,\ Y_1,\ Y_2,\ \ldots\ldots\ Y_{p-1},\ 1,$$

sur lesquels nous pouvons répéter les raisonnements faits précédemment. Nous remarquons d'abord que deux polynômes consécutifs Y_{n-1}, Y_n ne peuvent s'annuler à la fois; car de l'égalité

$$X_{n-1}=X_nQ_n-X_{n+1},$$

en divisant par X_p, on déduit

$$Y_{n-1}=Y_nQ_n-Y_{n+1};$$

si les deux polynômes Y_{n-1}, Y_n s'annulaient pour une même valeur de x, le suivant Y_{n+1} s'annulerait aussi, et de même Y_{n+2}, Y_{n+3}, ... et enfin Y_p ou 1, ce qui est impossible.

Nous remarquons ensuite que si un polynôme intermédiaire Y_n change de signe quand x passe par la valeur a, comme on a pour cette valeur

$$Y_{n-1} = -Y_{n+1},$$

les deux polynômes Y_{n-1}, Y_{n+1} ont des valeurs différentes de zéro et de signes contraires dans l'intervalle de $a-h$ à $a+h$; il en résulte que, quels que soient les signes du polynôme Y_n pour $x=a-h$ et $x=a+h$, la suite des trois polynômes

$$Y_{n-1},\ Y_n,\ Y_{n+1}$$

présentera, pour chacune de ces valeurs de x une variation et une seule; seulement cette variation se sera déplacée d'un côté ou de l'autre.

On en conclut, comme précédemment, que le nombre des variations de la seconde suite n'est pas modifiée quand un polynôme intermédiaire change de signe; le dernier Y_p ou 1 conservant toujours le même signe, le nombre des variations ne changera donc que si le premier polynôme Y change de signe.

Nous savons que le plus grand commun diviseur X_p entre un polynôme X et sa dérivée X_1 est égal au produit des facteurs premiers du polynôme X, l'exposant de chacun d'eux étant diminué d'une unité; si donc on divise le polynôme X par ce plus grand commun diviseur X_p, on obtiendra pour quotient un polynôme Y égal au produit de tous les facteurs premiers qui composent le polynôme X, l'exposant de chacun d'eux étant réduit à l'unité. Soit, par exemple,

$$X = (x-a)^n (x-b)^p \ldots\ldots;$$

on aura

$$X_p = \pm (x-a)^{n-1}(x-b)^{p-1}\ldots\ldots,$$
$$Y = \frac{X}{X_p} = \pm (x-a)(x-b)\ldots\ldots$$

L'équation $Y = 0$ admet toutes les racines de l'équation $X = 0$, et n'en admet pas d'autres, mais chacune en qualité de racine simple.

Le polynôme Y_1, quotient de X_1 par X_p, n'est pas la dérivée de Y; cependant les deux polynômes Y, Y_1, placés en tête de la seconde suite de polynômes, jouissent de la même propriété que les deux polynômes X, X_1, placés en tête de la première; quand x passe par une racine a, ces deux polynômes ont des signes contraires un peu avant la racine, et le même signe un peu après. En effet, pour $x = a - h$, les deux polynômes X et X_1 ayant des valeurs de signes contraires, leurs quotients Y et Y_1 par une même quantité X_p différente de zéro, ont aussi des valeurs de signes contraires; pour $x = a + h$, les polynômes X et X_1 ayant des valeurs de même signe, les quotients Y et Y_1 ont aussi des valeurs de même signe. Ainsi, quand x passe par une racine a, il y a une variation perdue en tête de la seconde suite de polynômes, et comme la même chose a lieu pour chaque racine, on en conclut que le nombre des variations perdues, quand x passe d'une valeur x_0 à une valeur plus grande x_1 est égal au nombre des racines réelles comprises dans cet intervalle.

Mais on peut se dispenser de former la seconde suite de polynômes et appliquer la règle énoncée à la première elle-même. Car, si l'on considère les deux suites

$$X,\ X_1,\ X_2,\ldots\ldots X_{p-1},\ X_p$$
$$Y,\ Y_1,\ Y_2,\ldots\ldots Y_{p-1},\ 1$$

et que l'on attribue à x une valeur particulière x_0 différente de chacune des racines, on obtiendra les valeurs des polynômes de la seconde suite en divisant celles des polynômes de la première par un même nombre différent de zéro, savoir la valeur du polynôme X_p. Si ce diviseur est positif, tous les signes sont conservés; s'il est négatif, tous les signes sont changés; dans tous les cas, le nombre des variations que présentent les deux suites de valeurs, est le même. Par conséquent, le nombre des variations perdues, quand x passe de x_0 à x_1, est le même de part et d'autre.

Ainsi le théorème de Sturm peut être appliqué à la suite des polynômes

$$X, X_1, X_2, \ldots\ldots X_p$$

dans tous les cas, que l'équation $X = 0$ ait ou non des racines égales; le nombre des variations perdues, quand x passe de x_0 à x_1, indique le nombre des racines réelles différentes comprises dans cet intervalle. S'il y a des racines égales, chaque racine multiple n'est comptée qu'une fois; en d'autres termes, on ne tient pas compte du degré de multiplicité des racines.

Toutefois, dans la pratique, lorsque l'opération révèle l'existence d'un plus grand commun diviseur algébrique entre le polynôme X et sa dérivée, on a soin, comme nous l'avons expliqué au n° 198, de ramener la résolution de l'équation proposée $X = 0$ à celle d'équation de degrés moindres et qui n'ont plus de racines égales, et l'on applique le théorème de Sturm à celles-ci, si cela est nécessaire.

Exercices.

1° Partager un hémisphère en deux parties équivalentes par un plan parallèle à la base.

2° Déterminer les dimensions d'un prisme droit à base carrée, connaissant la surface totale et le volume.

3° Dans une sphère inscrire un cône d'un volume donné.

4° Déterminer un triangle connaissant les distances du centre du cercle inscrit aux trois sommets, ou les distances du centre du cercle circonscrit aux trois côtés.

5° Mener par les sommets d'un triangle trois droites passant par un même point et déterminant sur les côtés trois segments non consécutifs égaux entre eux.

6° Construire un segment de sphère ayant un volume donné et pour base un cercle donné.

7° Dans un cercle donné, inscrire un triangle isocèle d'une surface donnée.

8° Déterminer les côtés d'un triangle rectangle connaissant la somme des deux côtés de l'angle droit, et le volume qu'engendre le triangle tournant autour de l'hypoténuse.

CHAPITRE VI.

CALCUL DES RACINES INCOMMENSURABLES DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES.

221. Nous avons indiqué (livre VI, chap. IV) la manière de trouver les racines commensurables d'une équation algébrique. Occupons-nous maintenant du calcul des racines incommensurables. La première chose à faire est de séparer

les racines, c'est-à-dire de former des intervalles comprenant chacun une racine réelle et une seule. Le théorème de Sturm fournit une méthode générale pour la séparation des racines. Quand on a calculé la suite des polynômes

$$X,\ X_1,\ X_2,\ \ldots\ldots\ X_p$$

dont le dernier conserve toujours le même signe, on remplace x successivement par $x = -\infty$ et par $+\infty$, afin d'avoir le nombre des racines réelles. On détermine ensuite une limite supérieure des racines positives et une limite inférieure des racines négatives (nº 184). Dans la suite des polynômes, on remplace x par des nombres entiers équidistants compris entre ces limites; les intervalles dans lesquels il y a des variations perdues sont les seuls qui comprennent des racines réelles; s'il n'y a qu'une variation perdue, il n'y a qu'une racine réelle dans chaque intervalle, et les racines sont séparées. S'il y a dans un intervalle plus d'une variation perdue, on subdivisera cet intervalle en parties égales, et l'on continuera de cette manière jusqu'à ce que la séparation soit complétement effectuée. Mais cette méthode très-simple et très-nette en théorie exige en général des calculs longs et fastidieux. Dans la pratique, on parvient ordinairement à effectuer la séparation des racines en substituant directement des nombres équidistants dans le polynôme proposé et s'aidant de la considération de la dérivée. Quelques exemples feront bien comprendre la manière de procéder.

222. Exemple I. Soit l'équation du troisième degré

$$x^3 + 3x^2 - 17x + 5 = 0.$$

La règle de Descartes montre que cette équation a une racine réelle négative, et zéro ou deux racines positives. Par le

groupement des termes, on voit que $+3$ est une limite supérieure des racines positives et -6 une limite inférieure des racines négatives; les racines réelles sont donc comprises entre -6 et $+3$. En substituant les nombres entiers entre ces limites, on obtient les résultats suivants :

$$x = -6,\ -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$$
$$-1,\ +40,\ +57,\ +56,\ +43,\ +24,\ +5,\ -8,\ -9,\ +8.$$

Le polynôme ayant des valeurs de signes contraires pour $x=0$ et $x=1$, on en conclut qu'une première racine réelle positive est comprise entre 0 et 1; la seconde racine positive est comprise entre 2 et 3; la racine négative entre -6 et -5. L'équation proposée a ses trois racines réelles, et ces racines sont séparées.

On a ainsi les racines à moins d'une unité près. Pour avoir l'une d'elles à un dixième près, on substituera des nombres équidistants d'un dixième dans l'intervalle qui la comprend. Mais ordinairement on diminue beaucoup le nombre des substitutions à l'aide des considérations suivantes : Cherchons, par exemple, la racine comprise entre 2 et 3. Quand x varie de 2 à 3, la dérivée $3x^2+6x-17$ étant positive, la fonction croît; on peut admettre approximativement que la variation de la fonction est proportionnelle à celle de la variable; or, quand x croît d'une unité à partir de 2, la fonction éprouve un accroissement égal à $9+8$ ou 17; pour que la fonction éprouve un accroissement égal à 9, et par conséquent se réduise à zéro, il faut donner à x un accroissement à peu près égal à $\frac{9}{17}$, ou à 0,5; il est probable d'après cela que la racine diffère peu de 2,5. La substitution de $x=2,5$ dans le polynôme proposé donne un

résultat négatif $-3,125$; donc la racine est plus grande que 2.5. La substitution de $x=2,6$ donne encore un résultat negatif $-1,344$; donc la racine est plus grande que 2.6. Mais la substitution de $x=2,7$ donne un résultat positif $+0,653$; donc la racine est comprise entre 2,6 et 2,7.

Cherchons de même la racine comprise entre 0 et 1. Quand x varie de 0 à 1, la dérivée étant négative, la fonction décroît; admettons encore approximativement que la variation de la fonction est proportionnelle à celle de la variable; or, quand x croît d'une unité à partir de 0, la fonction éprouve une diminution égale à $5+8$ ou 13; pour que la fonction éprouve une diminution égale à 5, et par conséquent se réduise à zéro, il faut donner à x un accroissement à peu près égal à $\frac{5}{13}$ ou à 0,4. Il est probable d'après cela que la racine diffère peu de 0,4. La substitution de $x=0,4$ donnant un résultat négatif $-1,256$, la racine est plus petite que 0,4. La substitution de $x=0,3$ donnant un restant positif $+0,197$, la racine est comprise entre 0,3 et 0,4.

223. Exemple II. Dans l'exemple précédent, les racines ont été séparées par la substitution des nombres entiers; mais il n'en est pas toujours ainsi. Dans ce cas, on examine dans quel intervalle sont situées les racines qui n'ont pas été séparées, et l'on partage cet intervalle en dix parties égales. Soit l'équation

$$x^3-7x+7=0,$$

dont les racines sont comprises entre -4 et $+3$. La substitution des nombres entiers donne les résultats suivants :

$$\begin{array}{lcccccccc} x= & -4, & -3, & -2, & -1, & 0, & 1, & 2, & 3 \\ & -29, & +1, & +13, & +13, & +7, & +1, & +1, & +13. \end{array}$$

Il y a une racine négative entre -3 et -4; d'ailleurs, l'équation transformée en $-x$ n'ayant qu'une variation, l'équation proposée n'admet pas d'autre racine négative. La condition de réalité des racines (n° 211) étant ici satisfaite, il en résulte que l'équation a deux racines positives, mais ces deux racines sont comprises dans le même intervalle; il s'agit de voir dans lequel. Considérons pour cela l'équation

$$3x^2 - 7 = 0$$

que l'on obtient en égalant à zéro la dérivée du premier membre de l'équation proposée; nous savons (n° 207) qu'entre les deux racines positives de l'équation proposée, il y a une racine de la dérivée; cette racine est la racine positive $\sqrt{\frac{7}{3}}$, supérieure à 1, mais inférieure à 2. L'intervalle qui comprend les deux racines cherchées, devant comprendre aussi la quantité $\sqrt{\frac{7}{3}}$, est celui de 1 à 2. Afin de séparer les racines, nous subdiviserons cet intervalle.

Pour $x = 1,5$ on trouve un résultat négatif $-0,125$; donc l'une des racines positives est comprise entre 1 et 1,5, l'autre entre 1,5 et 2.

Voilà les racines séparées. L'interpolation par parties proportionnelles montre que l'une des racines est à peu près égale à 1,3, l'autre à 1,7. La substitution de $x = 1,3$ donnant un résultat positif $+0,097$, et celle de $x = 1,4$ un résultat négatif $-0,056$, la première racine est comprise entre 1,3 et 1,4. La substitution de $x = 1,7$ donnant un résultat positif $+0,013$, et celle de $x = 1,6$ un résultat négatif $-0,104$, la seconde racine est comprise entre 1,6 et 1,7.

Exemple III. L'équation

$$x^3 - 2x^2 + 5x - 7 = 0$$

n'a pas de racine négative; 2 est une limite supérieure des racines positives. La substitution des nombres entiers ne donne qu'un changement de signe, de 1 à 2. La dérivée $3x^2 - 4x + 5$ ayant ses racines imaginaires, l'équation proposée n'a qu'une racine réelle, et cette racine est comprise entre 1 et 2.

Exemple IV. L'équation

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 7 = 0$$

n'a pas de racine négative; 4 est une limite supérieure. La substitution des nombres entiers ne donne qu'un changement de signe, de 3 à 4. La dérivée $3x^2 - 8x + 5$ a ses racines réelles 1 et $\frac{5}{3}$. Si l'équation proposée avait ses trois racines réelles, la plus petite racine 1 de la dérivée devrait donner un résultat positif, la plus grande $\frac{5}{3}$ un résultat négatif (n° 209); la valeur du polynôme pour $x = 1$ étant négative, on en conclut que l'équation proposée n'a qu'une racine réelle, et cette racine est comprise entre 3 et 4.

Exemple V. L'équation

$$8x^3 - 12x^2 + 3x - 1 = 0$$

n'a pas de racine négative; 2 est une limite supérieure. La substitution des nombres entiers ne donne qu'un changement de signe de 1 à 2. L'équation $f'(x) = 0$ ayant ses deux racines, $x' = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$, $x'' = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$, réelles et comprises

entre o et 1, si l'équation proposée avait ses trois racines réelles, deux racines seraient comprises entre o et 1. Mais on peut écrire le polynôme sous la forme

$$-8x^2(1-x)-(4x^2-3x+1).$$

Le polynôme du second degré $4x^2-3x+1$ ayant ses racines imaginaires, est toujours positif; on voit donc que, quand x varie de o à 1, le polynôme proposé reste constamment négatif. Ce polynôme n'admet donc qu'une racine réelle, et cette racine est comprise entre 1 et 2.

Exemple VI. Considérons encore l'équation

$$x^3+11x^2-102x+181=0,$$

dont les racines réelles sont comprises entre les limites -18 et $+6$.

L'équation transformée en $-x$ n'ayant qu'une variation, l'équation proposée a une racine négative et une seule, et cette racine est comprise entre -17 et -18. Les deux autres racines seront réelles et positives, ou imaginaires. Les nombres entiers positifs donnant tous des résultats positifs; les deux racines positives, si elles existent, seront comprises dans le même intervalle. Pour reconnaître cet intervalle, on examinera les racines de la dérivée

$$3x^2+22x-102,$$

qui sont réelles, l'une positive, l'autre négative. La racine positive $\frac{-11+\sqrt{427}}{3}=3,22\ldots$ devant être comprise entre les deux racines positives de l'équation proposée, on en conclut que, si l'équation proposée admet des racines positives, elles seront comprises entre 3 et 4. Les substitutions de $x=3,2$ et de $x=3,3$ donnent des résultats positifs

$+0{,}008$ et $+0{,}127$; donc les deux racines, si elles existent, seront toutes deux comprises entre 3,2 et 3,3; il faut subdiviser cet intervalle. La substitution de $x=3{,}22$ donnant un résultat négatif $-0{,}001352$, il y a deux racines positives; les substitutions de $x=3{,}21$ et $x=3{,}23$ donnant des résultats positifs $+0{,}001261$ et $+0{,}000167$, l'une des racines est comprise entre 3,21 et 3,22, l'autre entre 3,22 et 3,23. Dans cet exemple, la difficulté de séparer les racines provient de ce qu'elles sont très-voisines l'une de l'autre.

Exemple VII. Soit l'équation du quatrième degré

$$x^4-5x^3-7x^2+15x+3=0.$$

D'après le théorème de Descartes, cette équation admet 0 ou 2 racines positives, 0 ou 2 racines négatives. Ces racines sont comprises entre -3 et $+7$. La substitution des nombres entiers donne les résultats

$$\begin{array}{llllllllll} x=-2, & -1, & 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6 \\ +1, & -13, & +3, & +7, & -19, & -69, & -113, & -97, & +57. \end{array}$$

Il y a quatre changements de signe et par conséquent quatre racines réelles et comprises, la première entre -2 et -1, la seconde entre -1 et 0, la troisième entre 1 et 2, la quatrième entre 5 et 6.

Calculons à un dixième près la racine comprise entre 1 et 2. L'interpolation par parties proportionnelles entre 1 et 2 indique l'accroissement $\frac{7}{26}$ ou 0,3. La substitution de $x=1{,}3$ donnant un résultat positif $+2{,}5411$, la racine est plus grande que 1,3; la substitution de $x=1{,}4$ donnant encore un résultat positif $+0{,}4016$, la racine est plus grande que 1,4; la substitution de $x=1{,}5$ donne un ré-

sultat négatif $-2{,}0625$; donc la racine est comprise entre $1{,}4$ et $1{,}5$.

Calculons de même la raison comprise entre 5 et 6, l'interpolation par parties proportionnelles indique un accroissement $\frac{97}{154}$ ou $0{,}6$. La substitution de $x=5{,}6$ donnant un résultat négatif, la racine est plus grande que $5{,}6$; la substitution de $x=5{,}7$ donnant encore un résultat négatif $-9{,}2949$, la racine est plus grande que $5{,}7$; la substitution de $x=5{,}8$ donne un résultat positif $+10{,}6096$; donc la racine est comprise entre $5{,}7$ et $5{,}8$.

EXEMPLE VIII. Soit l'équation

$$x^4-4x^3+x+4=0,$$

qui, d'après le théorème de Descartes, ne peut avoir plus de deux racines positives et de deux racines négatives. Ces racines sont comprises entre -1 et $+4$. La substitution des nombres entiers donne pour résultats

$$\begin{array}{llllll} x=-1, & 0, & 1, & 2, & 3, \\ +8, & +4, & +2, & -10, & -20, & +8. \end{array}$$

On voit qu'il y a deux racines positives et comprises, l'une entre 1 et 2, l'autre entre 3 et 4. S'il y avait deux racines négatives, elles seraient toutes deux comprises entre 0 et -1; or, dans cet intervalle, les deux premiers termes étant positifs, ainsi que la partie $x+4$, le polynôme reste constamment positif; l'équation n'admet donc pas de racines négatives.

224. EXEMPLE IX. Considérons l'équation du cinquième degré

$$x^5-3x^3+x^2-8x-10=0$$

qui admet 1 ou 3 racines positives, 0 ou 2 racines négatives. En groupant les termes de cette façon

$$(x^5 - 3x^3 - 8x - 10) + x^2 = 0,$$

on voit que 3 est une limite supérieure des racines positives. Le nombre -3 est une limite inférieure des racines négatives. La substitution des nombres entiers donne les résultats

$$\begin{array}{lrrrrrrr} x = & -3, & -2, & -1, & 0, & 1, & 2, & 3 \\ & -148, & +2, & +1, & -10, & -19, & -14, & +137. \end{array}$$

Il y a deux racines négatives et comprises, l'une entre -3 et -2, l'autre entre -1 et 0. Il y a une racine positive entre 2 et 3. Si l'on met l'équation sous la forme

$$-x^3(4 - x^2) - x(8 - x^2) - (10 - x^2) = 0,$$

on voit que le premier membre reste constamment négatif, quand x varie de 0 à 2. Il reste donc à examiner si l'équation peut avoir trois racines entre 2 et 3. Si l'on écrit la dérivée

$$5x^4 - 9x^2 + 2x - 8$$

sous la forme

$$(5x^4 - 9x^2 - 4) + (2x - 4),$$

on reconnaît que 2 est une limite supérieure des racines de la dérivée. Ainsi l'équation proposée n'admet qu'une racine positive. Nous avons déjà traité cet exemple par le théorème de Sturm (n° 219).

225. Exemple X. Considérons enfin l'équation

$$8x^4 - 40x^3 + 57x^2 - 40x + 49 = 0$$

qui n'admet pas de racines négatives. Le groupement des

termes fournit la limite supérieure $+5$. La substitution des nombres entiers donne les résultats

$$\begin{array}{llllll} x= 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \\ 49, & 34, & 5, & 10, & 289, & +. \end{array}$$

Il n'y a pas de changement de signe. Il faut recourir à la dérivée

$$32x^3 - 120x^2 + 114x - 40 = 0.$$

En substituant des nombres entiers de 0 à la limite supérieure 4, on n'obtient qu'un changement de signe de 2 à 3. La seconde dérivée

$$6(16x^2 - 40x + 19) = 0$$

a ses deux racines réelles $x = \frac{5 \pm \sqrt{6}}{4}$. Si la première dérivée avait ses trois racines réelles, la plus petite racine de la seconde dérivée devrait donner un résultat positif; cette racine est plus petite que $\frac{3}{4}$, comme on peut mettre la première dérivée sous la forme

$$-32x^2\left(\frac{3}{4} - x\right) - (96x^2 - 114x + 40),$$

et que le trinôme du second degré $96x^2 - 114x + 40$ a ses racines imaginaires, on voit que de 0 à $\frac{3}{4}$, cette dérivée est négative; elle n'a donc qu'une racine réelle. On en conclut que l'équation proposée ne peut avoir plus de deux racines réelles (n° 208); si elles existent, elles seront comprises entre 2 et 3. La substitution de $x = 2{,}5$ donne un résultat négatif $-7{,}2500$; donc l'équation proposée admet deux

racines réelles et comprises, l'une entre 2 et 2,5 l'autre entre 2,5 et 3.

L'interpolation par parties proportionnelles entre 2 et 2,5 indique l'accroissement 0,2. La substitution de $x = 2,2$ donnant un résultat négatif $-1,6352$, la première racine est plus petite que 2,2. La substitution de $x = 2,1$ donnant un résultat positif $+1,5148$, cette racine est comprise entre 2,1 et 2,2.

L'interpolation entre 2,5 et 3 indique l'accroissement 0,2. La substitution de $x = 2,7$ donnant un résultat négatif $-5,6372$, la seconde racine est plus grande que 2,7. La substitution de $x = 2,8$ donnant encore un résultat négatif $-2,4752$, cette racine est plus grande que 2,8. La substitution de $x = 2,9$ donnant un résultat positif $+2,6348$, la racine est comprise entre 2,8 et 2,9.

Dans les exemples précédents, nous sommes parvenus à séparer les racines par des substitutions convenablement dirigées, et en nous aidant de la considération de la dérivée. Pour que ce qui précède réussisse, il faut évidemment que l'équation n'ait pas de racines égales. Lorsque après plusieurs essais infructueux on n'a pas réussi à séparer les racines, on est amené à voir si l'équation n'a pas de racines égales; il faut pour cela chercher le plus grand commun diviseur entre le polynôme et sa dérivée; il convient dans ce cas de disposer les calculs de manière à appliquer le théorème de Sturm, et l'on est ramené ainsi à la méthode générale que nous avons exposée au commencement de ce chapitre.

CHAPITRE VII.

MÉTHODES D'APPROXIMATION.

Méthode de Newton.

226. Quand on a séparé les racines d'une équation et obtenu l'une d'elles avec un certain degré d'approximation, par exemple à un dixième ou un centième près, il est très-facile de la calculer avec une approximation de plus en plus grande. Nous parlerons d'abord de la méthode connue sous le nom de méthode de Newton.

Supposons qu'une racine, et une seule, soit comprise entre x_0 et $x_0 + h$. Représentons cette racine par $x_0 + \alpha$, α étant plus petit que h en valeur absolue, et développons $f(x_0 + \alpha)$ suivant la loi connue

$$f(x_0 + \alpha) = f(x_0) + f'(x_0)\frac{\alpha}{1} + f''(x_0)\frac{\alpha^2}{1.2} + \ldots\ldots;$$

nous aurons pour déterminer l'inconnue α l'équation

$$(1) \qquad o = f(x_0) + f'(x_0)\alpha + f''(x_0)\frac{\alpha^2}{1.2} + \ldots\ldots$$

L'inconnue α étant une quantité très-petite, on négligera les puissances supérieures à la première, et l'on aura l'équation du premier degré

$$f(x_0) + \alpha f'(x_0) = o,$$

d'où l'on déduit la valeur approchée

$$(2) \qquad \alpha = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

On peut écrire l'équation sous la forme

$$(3)\quad \alpha = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \left[\frac{f''(x_0)}{2f'(x_0)}\alpha^2 + \frac{f'''(x_0)}{2.3f'(x_0)}\alpha^3 + \dots\dots\right].$$

L'erreur commise quand on prend la valeur approchée $-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ est exprimée par la parenthèse; pour se rendre compte de l'erreur, on évaluera rapidement et par excès la valeur absolue de cette parenthèse.

227. Mais on peut obtenir une expression beaucoup plus simple du reste. La formule de Taylor (n° 136), si l'on s'arrête à la seconde dérivée, donne

$$f(x_0 + \alpha) = f(x_0) + \frac{\alpha}{1} f'(x_0) + \frac{\alpha^2}{1.2} f''(x_0 + \theta\alpha);$$

on aura donc pour déterminer l'inconnue α l'équation

$$(4)\qquad 0 = f(x_0) + \frac{\alpha}{1} f'(x_0) + \frac{\alpha^2}{1.2} f''(x_0 + \theta\alpha),$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$(5)\qquad \alpha = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{\alpha^2}{2}\frac{f''(x_0 + \theta\alpha)}{f'(x_0)}.$$

Si l'on prend la valeur approchée $\alpha = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$, l'erreur commise a pour expression

$$(6)\qquad \varepsilon = -\frac{\alpha^2}{2}\frac{f''(x_0 + \theta\alpha)}{f'(x_0)}.$$

Pour évaluer cette erreur, on remplacera $f''(x_0 + \theta\alpha)$ par la plus grande valeur absolue de la seconde dérivée $f''(x)$, quand x varie de x_0 à $x_0 + h$, ou par une valeur plus grande.

La quantité $\frac{f''(x_0+\theta\alpha)}{2f'(x_0)}$ étant ordinairement plus petite que l'unité en valeur absolue, l'erreur commise sera moindre que α^2, et par conséquent moindre que h^2. Ainsi l'application de cette méthode double en général le nombre des chiffres décimaux exacts. Par exemple si h est égale à 0,1, l'erreur commise sera en général moindre que 0,01; on connaissait la racine avec un chiffre décimal exact, on l'a maintenant avec deux chiffres décimaux. De même, si h est égal à 0,01, l'erreur commise sera en général moindre que 0,0001; on connaissait la racine avec deux chiffres décimaux exacts, on l'a maintenant avec quatre. On peut répéter l'opération plusieurs fois successivement, en se servant de la valeur donnée par une première opération pour en déduire une valeur plus rapprochée, etc.

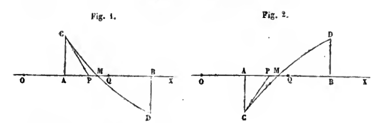
Nous avons supposé la racine comprise entre x_0 et x_0+h. La quantité h est positive ou négative, suivant que la valeur x_0 est approchée par défaut ou par excès.

228. Cette méthode d'approximation a une signification géométrique très-simple. Représentons par deux ordonnées AC et BD les valeurs y_0 et y_1 de signes contraires du polynôme pour $x=x_0$ et $x=x_1=x_0+h$, et traçons la courbe du point C au poind D. Cette courbe coupe l'axe OX en un point M qu'il s'agit de déterminer. Il est aisé de voir que la méthode de Newton revient à mener la tangente CP au point C.

On sait en effet que la tangente à la courbe au point C a pour équation

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0).$$

Si l'on fait $y=0$ pour avoir le point P où la tangente coupe



l'axe OX, on en déduit

$$x - x_0 = -\frac{y_0}{f'(x_0)} = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

229. L'emploi de la méthode de Newton exige quelques précautions particulières. Nous avons supposé que l'intervalle de x_0 à x_1 ne comprend qu'une racine du polynôme $f(x)$; nous supposerons, en outre, que la seconde dérivée ne change pas de signe dans cet intervalle. L'arc de courbe CMD est convexe, et le signe de la seconde dérivée indique de quel côté cet arc tourne sa concavité; la concavité est tournée vers le haut ou vers le bas, suivant que la seconde dérivée est positive ou négative. Afin d'être sûr d'approcher davantage de la racine, on mènera la tangente en celui des points C et D où $f(x)$ et $f''(x)$ ont le même signe. Si l'on mène la tangente en C, on posera $x = x_0 + \alpha$, et l'on aura la formule de correction $\alpha = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. Si l'on mène la tangente en D, on posera $x = x_1 + \alpha$, et l'on aura $\alpha = -\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$. La quantité α est positive dans le premier cas, négative dans le second.

Pour se convaincre de l'exactitude de cette règle, il suffit de tracer la figure dans les diverses dispositions qu'elle peut affecter. Considérons d'abord le cas où $f(x_0)$ et $f''(x_0)$ sont

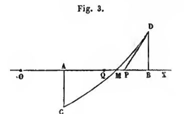
positives (fig. 1); x_0 étant inférieure à la racine, $f(x_0)$ et $f'(x_0)$ ont des signes contraires (n° 215) et par conséquent $f'(x_0)$ a une valeur négative. Si donc on mène la tangente au point C, la portion PC de cette tangente située au-dessus de l'axe horizontal OX fait avec la direction OX un angle obtus et la tangente rencontre l'axe à droite du point A. D'autre part, puisque la seconde dérivée est positive de x_0 à x_1, l'arc de courbe CMD est placé au-dessus de la tangente, et par conséquent coupe l'axe en un point M situé à droite du point P. La quantité α est positive et égale à $+AP$; la valeur OP qu'elle fournit est plus approchée de la racine OM que la valeur primitive OA, et elle est approchée par défaut. Si l'on menait la tangente au point D, elle pourrait rencontrer l'axe en dehors de l'intervalle AB et il pourrait arriver que l'on s'éloignât du point M au lieu de s'en rapprocher. L'erreur commise ε est positive; en l'estimant par excès et la portant sur l'axe en PQ, on forme un nouvel intervalle très-petit PQ comprenant la racine.

Supposons maintenant $f(x_0)$ et $f''(x_0)$ négatives (fig. 2); $f'(x_0)$ est positive; le prolongement de la tangente CP au-dessus de OX fait un angle aigu avec la direction OX et par conséquent rencontre l'axe en un point P situé à droite de A. D'ailleurs puisque $f''(x)$ est négative, l'arc de courbe CMD est placé au-dessous de la tangente et rencontre l'axe en un point M situé à droite du point P. La valeur OP est plus approchée de la racine OM que la valeur primitive OA.

La figure 3 se rapporte au cas où les deux quantités $f(x_1)$ et $f''(x_1)$ sont positives; x_1 étant supérieure à la racine, $f(x_1)$ et $f'(x_1)$ ont le même signe et par conséquent $f'(x_1)$ est aussi positive. La portion PD de la tangente en D située au-dessus de l'axe OX fait avec la direction OX un angle

aigu et la tangente rencontre l'axe à gauche du point B.

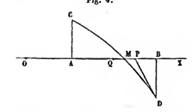
Fig. 3.



D'ailleurs, $f''(x)$ étant positive, l'arc de courbe est placé au-dessus de la tangente et rencontre l'axe en un point M situé à gauche du point P. La quantité α est ici négative et égale à $-$BP; la valeur OP qu'elle fournit est plus approchée de la racine OM que la valeur primitive OB et elle est aussi approchée par excès. Si l'on menait la tangente en C, elle pourrait rencontrer l'axe en dehors de l'intervalle AB. L'erreur ε est ici négative; en estimant par excès sa valeur absolue, on comprendra la racine dans un intervalle très-petit PQ.

La figure 4 se rapporte au cas où $f(x_1)$ et $f''(x_1)$ sont né-

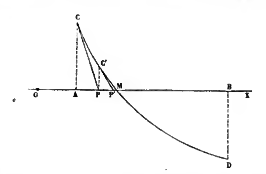
Fig. 4.



gatives; $f'(x_1)$ est aussi négative, et le prolongement de la tangente en D au-dessus de l'axe OX fait avec cet axe un angle obtus et par conséquent la tangente rencontre l'axe à gauche du point B. La courbe étant située au-dessous de la

tangente rencontre l'axe à gauche du point P. La valeur OP est donc plus approchée de la racine OM que OB.

L'application de la méthode précédente plusieurs fois successivement revient à mener une série de tangentes



telles que CP, C'P', ... ; les points P, P', ... où ces tangentes rencontrent l'axe, se rapprochent très-rapidement du point M.

Exemples.

230. Reprenons l'équation

$$x^3 + 3x^2 - 17x + 5 = 0,$$

dont la plus petite racine positive est comprise entre 0,3 et 0,4 (n° 222). La fonction étant positive pour $x = 0,3$, ainsi que la seconde dérivée, la courbe a la disposition de la figure 1. On mènera la tangente au point C, et la méthode de Newton donnera la correction approchée par défaut

$$\alpha = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = \frac{0,197}{14,93} = 0,01319. \ldots .$$

Évaluons maintenant l'erreur commise, à l'aide de la formule (6) du n° 227; $f''(x)$ a une valeur positive qui croît

avec x, puisque $f'''(x)$ est positive; la valeur de $f''(x_0 + \theta x)$ est donc plus petite que $f''(x_1)$ ou que $f''(0,4)$, et l'on a

$$\varepsilon < \frac{\alpha^2 \times 8,4}{2 \times 14,93} < \alpha^2 \times 0,3.$$

La quantité α étant plus petite que h ou que $0,1$, on voit de suite que ε est moindre que $0,003$; il en résulte que α est plus petit que $0,014 + 0,003$ et par conséquent plus petit que $0,017$. En mettant cette valeur dans l'expression de l'erreur, on a

$$\varepsilon < 0,017^2 \times 0,3 < 0,0001.$$

La valeur de α est donc comprise entre $0,0131$ et $0,0133$; on prendra $\alpha = 0,0132$ et l'on aura la racine $x = 0,3132$ à moins d'un dix-millième près.

La plus grande racine positive est comprise entre $2,6$ et $2,7$. La fonction étant positive pour $x = 2,7$ ainsi que la seconde dérivée, on mènera la tangente au point D (fig. 3) et l'on aura

$$\alpha = -\frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -\frac{0,653}{21,07} = -0,03099\ldots,$$

$$\varepsilon < \frac{\alpha^2 \times 22,2}{2 \times 21,07} < \alpha^2 \times 0,6.$$

La valeur absolue de α étant moindre que $0,1$, on voit de suite que l'erreur ε est moindre que $0,006$; on en conclut que la valeur absolue de α est inférieure à $0,04$. En mettant cette valeur dans l'expression de l'erreur, on a

$$\varepsilon < 0,04^2 \times 0,6 < 0,001.$$

La valeur absolue de α est donc comprise entre $0,030$ et $0,032$; on prendra $\alpha = -0,031$, et l'on aura la racine $x = 2,669$ à moins d'un millième près.

231. Nous avons vu (n° 225) que l'équation

$$x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 15x + 3 = 0$$

a sa plus grande racine comprise entre 5,7 et 5,8. Pour $x = 5{,}8$ la fonction étant positive, ainsi que la seconde dérivée, la courbe a la disposition indiquée par la figure 3; on mènera la tangente au point D et l'on aura la correction approchée

$$\alpha = -\frac{10{,}6096}{209{,}648} = -0{,}0506. \;.\;.\;.\;.$$

La dérivée troisième étant positive, $f''(x)$ va en croissant avec x; on a donc $f''(x_1 + \theta\alpha) < f''(x_1)$, et par suite

$$\varepsilon < \frac{\alpha^2 f''(x_1)}{2 \times 209{,}648} = \frac{\alpha^2 \times 215{,}68}{2 \times 209{,}648} < \alpha^2 \times 0{,}52.$$

Puisque la valeur absolue de α est moindre que 0,1, on voit que ε est moindre que 0,006; on en conclut que la valeur absolue de α est inférieure à 0,06. En mettant cette valeur dans l'expression de l'erreur, on a

$$\varepsilon < 0{,}06^2 \times 0{,}52 < 0{,}002.$$

La valeur absolue de α est comprise entre 0,050 et 0,053; on prendra $\alpha = 0{,}052$, et on aura $x = 5{,}748$ à moins de deux millièmes près.

Interpolation par parties proportionnelles.

232. Nous avons déjà fait usage de cette méthode pour abréger le calcul des substitutions. Elle consiste à supposer que, dans un intervalle assez petit, la variation de la fonction est sensiblement proportionnelle à celle de la variable. Quand x varie de x_0 à x_1, la fonction éprouve une variation égale à $f(x_1) - f(x_0)$; à une variation $x_1 - x_0 = h$ de la variable correspond donc une variation $f(x_1) - f(x_0)$ de

la fonction ; cherchons quelle variation α il faut donner à la variable pour que la fonction éprouve une variation égale à $-f(x_0)$, et par conséquent devienne nulle ; on a la proportion

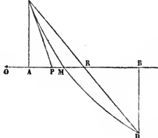
$$\frac{\alpha}{h} = \frac{-f(x_0)}{f(x_1)-f(x_0)},$$

d'où

$$\alpha = \frac{-hf(x_0)}{f(x_1)-f(x_0)}.$$

La valeur approchée de la racine sera $x_0 + \alpha$; mais nous ne savons pas évaluer l'erreur ; il faudra donc faire de nouvelles substitutions. Par exemple, si l'on a calculé d'abord la racine à un dixième près, h étant égal à un dixième, on prendra α à un centième et on substituera dans la fonction des nombres équidistants de un centième, en montant ou en descendant, jusqu'à ce qu'on obtienne deux résultats de signes contraires. Quand on aura ainsi trouvé la racine avec deux chiffres décimaux exacts, on effectuera une nouvelle interpolation ; h étant égal maintenant à un centième, on calculera α à un dix-millième ; puis on fera de nouvelles substitutions pour avoir la racine avec quatre chiffres décimaux exacts, et ainsi de suite. En général on double à chaque opération le nombre des chiffres décimaux.

233. Ce mode d'interpolation revient à remplacer l'arc de courbe CMD par la ligne droite CD.



En effet, la droite CD a pour équation

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0).$$

Si l'on fait $y = 0$ pour avoir le point R où cette droite

coupe l'axe OX, on en déduit

$$x - x_0 = \frac{-y_0(x_1 - x_0)}{y_1 - y_0} = = -\frac{hf(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}.$$

Lorsque la seconde dérivée conserve le même signe de x_0 à x_1, l'arc de courbe convexe CMD est situé entre la corde CD et la tangente CP prolongée, et par conséquent le point M, où elle coupe l'axe, est compris entre les points P et R; la vraie valeur de la racine est donc comprise entre les deux valeurs approchées fournies par la méthode de Newton et par la méthode d'interpolation. L'emploi simultané des deux méthodes dispensera donc de l'évaluation de l'erreur, et l'on saura d'une manière précise sur quelle approximation on peut compter.

Reprenons, par exemple, l'équation (n° 231)

$$x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 15x + 5 = 0$$

qui a une racine comprise entre 5,7 et 5,8. La courbe ayant la forme indiquée par la figure 5, la méthode de Newton donne un résultat trop fort, et l'on a

$$x < 5,8 - 0,0506 = 5,7494.$$

L'interpolation donne au contraire un résultat trop faible,

$$\alpha = \frac{0,1 \times 9,2949}{19,9045} = 0,0466\ldots,$$

et l'on a

$$x > 5,7466.$$

On prendra $x = 5,748$ à moins de deux millièmes près.

CHAPITRE VIII.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS TRANSCENDANTES.

234. On ne peut pas appliquer le théorème de Sturm aux équations transcendantes; mais on peut leur appliquer le théorème de Rolle, pourvu que la fonction et ses dérivées restent finies et continues; on effectuera par ce moyen la séparation des racines en dirigeant convenablement les substitutions. Une fois les racines séparées et obtenues avec une certaine approximation, on les calculera avec un plus grand nombre de chiffres décimaux par la méthode de Newton. Supposons qu'une racine, et une seule, soit comprise entre x_0 et x_0+h; on posera $x=x_0+\alpha$, et l'on aura, d'après la formule de Taylor,

$$o=f(x_0+\alpha)=f(x_0)+\alpha f'(x_0)+\frac{\alpha^2}{2}f''(x_0+\theta\alpha),$$

d'où

$$\alpha=-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}-\frac{\alpha^2 f''(x_0+\theta\alpha)}{2f'(x_0)}.$$

Si l'on prend la valeur approchée

$$\alpha=-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

l'erreur commise aura pour expression

$$\varepsilon=-\frac{\alpha^2 f''(x_0+\theta\alpha)}{2f'(x_0)}.$$

Le calcul est le même que pour les équations algébriques.

235. Exemple I. Soit l'équation

$$10^x=257x.$$

Si l'on prend les logarithmes vulgaires des deux membres, cette équation devient

$$f(x) = x - (\log x + \log 257) = x - (\log x + 2,40993312) = 0.$$

Substituons d'abord à la variable x les nombres entiers 0, 1, 2, 3, ..., en nous bornant à reconnaître le signe de $f(x)$ sans faire de calcul. Pour $x = 0$, $\log x = -\infty$; donc $f(x) = +\infty$. Pour $x = 1$, $\log 1 = 0$, $f(1) < 0$. Ainsi, il y a une première racine comprise entre 0 et 1. Pour $x = 2$, la parenthèse étant supérieure à 2, on aura encore évidemment $f(2) < 0$. Si l'on ajoute le logarithme de 3, qui est $0,477$, au nombre constant $2,409$, on voit de suite que l'on aura un résultat plus petit que 3; donc $f(3) > 0$. Ainsi, il y a une seconde racine entre 2 et 3. L'équation proposée n'a pas d'autre racine réelle; car la dérivée $f'(x) = 1 - \frac{M}{x}$ n'a qu'une racine $x = M$. (M désigne ici le module des logarithmes vulgaires.)

Proposons-nous de calculer la racine comprise entre 2 et 3, d'abord à un dixième. On substituera à x les valeurs successives $2,1$; $2,2$; ..... Mais on peut diminuer beaucoup le nombre des substitutions. Le logarithme de $2,1$ est $0,322$; ajouté à $2,409$, il donne $2,73$; il en résulte que $x = 2,7$ donnera encore un résultat négatif. Il suffit de lire les deux premiers chiffres des logarithmes de $2,8$ et de $2,9$ pour voir que $x = 2,8$ donnera un résultat négatif, $2,9$ un résultat positif. Ainsi, la racine est comprise entre $2,8$ et $2,9$.

Cherchons-la maintenant à un centième. Le logarithme de $2,81$ ajouté à $2,409$ donne $2,85$; il en résulte que $2,85$ donnera encore un résultat négatif. Essayons $2,86$; le logarithme de $2,86$ ajouté à $2,409$ donne $2,866$; le résultat est négatif. Le logarithme de $2,87$ ajouté à $2,409$ donne

2,867; le résultat est positif. Ainsi la racine est comprise entre 2,86 et 2,87.

Calculons-la à un millième. Le logarithme de 2,861 ajouté à 2,4099 donne 2,866 : on en conclut que 2,866 donne encore un résultat négatif. On essayera 2,867 et 2,868; le premier donne un résultat négatif, le second un résultat positif. Ainsi, la racine est comprise entre 2,867 et 2,868.

Le logarithme de 2,8671 ajouté à 2,40993 donne 2,86737; on en conclut que la racine est plus grande que 2,8673. En remplaçant dans le premier membre de l'équation x successivement par 2,8674 et 2,8675, on obtient deux résultats de signes contraires, $-0,0000214$ et $+0,0000635$. Ainsi, la racine est comprise entre 2,8674 et 2,8675.

On fera ensuite une interpolation par parties proportionnelles. Quand on passe d'une valeur à l'autre, la variation de la fonction est 0,0000849; on a donc

$$\frac{\alpha}{h} = \frac{214}{849} = 0,252\ldots.$$

Les deux termes de la fraction étant approchés, à moins d'une unité près, l'erreur commise sur le quotient est moindre que 0,002; on prendra donc $\frac{\alpha}{h} = 0,25$ et $x = 2,867425$. On ne peut pas aller plus loin avec les tables de Callet.

236. Exemple II. Considérons l'équation

$$x^x = 100,$$

qui a été traitée par Euler. Si l'on prend les logarithmes vulgaires, l'équation devient

$$f(x) = x \log x - 2 = 0,$$

et l'on a

$$f'(x) = \log x + M; \quad f''(x) = \frac{M}{x}.$$

Quand x varie de o à 1, $f(x)$ reste négative et il n'y a pas de racine dans cet intervalle. Substituons les nombres entiers consécutifs

$$x = 2, \quad \log 2 = 0{,}301, \quad 2\log 2 = 0{,}60, \quad f(x) = -1{,}40,$$
$$x = 3, \quad \log 3 = 0{,}477, \quad 3\log 3 = 1{,}43, \quad f(x) = -0{,}57,$$
$$x = 4, \quad \log 4 = 0{,}602, \quad 4\log 4 = 2{,}41, \quad f(x) = +0{,}41.$$

La dérivée s'annule pour $x = \frac{1}{e}$, et reste positive pour toutes les valeurs de x supérieures à cette valeur; on en conclut que $f(x)$ va en croissant constamment quand x varie de $\frac{1}{e}$ à $+\infty$; cette fonction passe donc une fois et une seule fois par zéro. Ainsi, l'équation proposée n'admet qu'une racine réelle, et cette racine est comprise entre 3 et 4.

Afin de diminuer le nombre des substitutions, effectuons rapidement une interpolation par parties proportionnelles entre 3 et 4. On a

$$\alpha = \frac{0{,}57}{0{,}98} = 0{,}58.$$

Essayons 3,5.

$$x = 3{,}5, \quad \log x = 0{,}5440680 4, \quad f(x) = -0{,}09576186,$$
$$x = 3{,}6, \quad \log x = 0{,}55630250, \quad f(x) = +0{,}00268900.$$

La racine est comprise entre 3,5 et 3,6 et très-rapprochée de ce dernier nombre.

En appliquant la méthode de Newton et partant de la limite supérieure (fig. 3, n° 229), on a la correction

$$\alpha = -\frac{268900}{99059698} = -0{,}0027145\ldots.$$

On évaluera l'erreur par la formule

$$\varepsilon < \frac{\alpha^2}{2}\frac{f''(3,5)}{f'(3,6)} < \frac{\alpha^2 \times 0,13}{2 \times 0,99} < \alpha^2 \times 0,07.$$

Puisque α est moindre que $0,1$ en valeur absolue, on voit de suite que l'erreur est moindre que $0,0007$; on en conclut que la valeur absolue de α est inférieure à $0,0028 + 0,0007$, ou à $0,0035$. En mettant cette valeur dans l'expression de l'erreur, on a

$$\varepsilon < 0,0035^2 \times 0,07 < 0,000001.$$

La valeur de α est donc comprise entre $-0,0027145$ et $-0,0027156$; on prendra $\alpha = -0,002715$ et l'on aura la racine $x = 3,597285$ avec six décimales exactes.

237. Exemple III. Soit l'équation

$$f(x) = x - \cos x = 0,$$

traitée aussi par Euler. On a

$$f'(x) = 1 + \sin x, \quad f''(x) = \cos x.$$

Pour $x = 0$, on a $f(x) = -1$; pour $x = \frac{\pi}{2}$, on a $f(x) = +\frac{\pi}{2}$. L'équation admet une racine dans cet intervalle, et elle n'en admet qu'une, puisque la dérivée ne s'annule pas. Au delà de $\frac{\pi}{2}$, x étant plus grand que 1, il n'y a plus de racine. Il n'y a pas non plus de racine négative. Ainsi l'équation proposée n'admet qu'une racine réelle, et elle est comprise entre 0 et 1.

Pour faire les substitutions, nous nous servirons de la partie des tables de Callet qui donne les sinus naturels suivant la nouvelle division de la circonférence et de la partie qui donne les longueurs mêmes de ces arcs. L'arc égal à 1

vaut à peu près 64 degrés modernes. En suivant de l'œil les deux tables, on voit que le changement de signe a lieu de 47° à 48°.

$$x = 47° = 0{,}738, \quad \cos x = 0{,}740, \quad f(x) = -0{,}002,$$
$$x = 48° = 0{,}754, \quad \cos x = 0{,}729, \quad f(x) = +0{,}025.$$

La racine est comprise entre 47° et 48° et très-rapprochée du premier de ces nombres. L'interpolation par parties proportionnelles donne $\alpha = \frac{2}{27} < 0{,}1$. Ainsi il est probable que la racine est comprise entre 47° et 47°,1.

Voici le nouveau calcul de substitution :

$x = 47° =$	0,73827 427	$x = 47°,1 =$	0,73984 507
$\cos x =$	0,73963 109	$\cos x =$	0,73857 302
$f(x) =$	$-$ 0,00135 682	$f(x) =$	$+$ 0,00127 205

La racine est comprise entre 47° et 47°,1.

La méthode de Newton (fig. 3, n° 229) donne la correction

$$\alpha = -\frac{0{,}00127\,205}{1{,}67417\,349} = -0{,}00075\,980 \ldots.$$

On évaluera l'erreur par la formule

$$\varepsilon < \frac{\alpha^2 \times 0{,}74}{2 \times 1{,}67} < \alpha^2 \times 0{,}23.$$

La valeur absolue de α étant moindre que 0,002, l'erreur est moindre que $0{,}002^2 \times 0{,}23$ ou que 0,000001; on en conclut que la valeur absolue de α est plus petite que 0,000760 + 0,000001 ou que 0,0008. Mettant cette valeur dans l'expression de l'erreur, on a

$$\varepsilon < 0{,}0008^2 \times 0{,}23 < 0{,}00000015.$$

La valeur de α est donc comprise entre $-$0,00075 980 et

$-0{,}00075\,996$; il en résulte que la valeur de x est elle-même comprise entre $0{,}73908528$ et $0{,}73908511$; on prendra $x = 0{,}7390852$ avec sept décimales exactes.

238. Exemple IV. Soit l'équation

$$f(x) = x - \operatorname{tang} x = 0,$$

que l'on rencontre dans la théorie des vibrations des corps élastiques et aussi dans l'étude des lois de la propagation de la chaleur. On a

$$f'(x) = -\operatorname{tang}^2 x, \quad f''(x) = -\frac{2 \operatorname{tang} x}{\cos^2 x}.$$

On voit d'abord que les racines de l'équation sont deux à deux égales et de signes contraires. Quand x varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$, l'arc étant plus petit que la tangente, la fonction est négative; de $\frac{\pi}{2}$ à π, la tangente étant négative, la fonction est positive; ainsi il n'y a pas de racine de 0 à π. Quand x varie de π à $\frac{3\pi}{2}$, la fonction passe d'une valeur positive à une valeur négative; il y a donc une racine réelle dans cet intervalle, et il n'y en a qu'une, puisque la dérivée ne s'annule pas; de $\frac{3\pi}{2}$ à 2π, la tangente étant négative, la fonction reste positive. Si l'on continue à faire croître x, on trouvera de même deux racines réelles à chaque tour de circonférence, une dans le premier, l'autre dans le troisième quadrant. Ainsi l'équation admet une infinité de racines réelles.

Proposons-nous de calculer la plus petite racine positive; pour $x = \pi + \frac{\pi}{4}$, la tangente est égale à 1 et la fonction est

encore positive; la racine est donc comprise entre $\frac{5\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{2}$, c'est-à-dire entre 3,9 et 5. Essayons le nombre intermédiaire 4,5. Posons $x = \pi + x'$; pour $x = 4,5$, l'arc x' est égal à 1,3584 et vaut à peu près 77° 50' en degrés anciens. On cherchera dans les tables le logarithme de la tangente, puis la valeur même de la tangente :

$$x = 4,5, \quad x' = 77°50', \quad \log\operatorname{tang} x' = 0,6663537;$$
$$\operatorname{tang} x' = 4,6584, \quad f(x) = -0,1584.$$

Le résultat étant négatif, le nombre 4.5 est trop grand. Essayons 4,4 :

$$x = 4,4, \quad x' = 72°6', \quad \log\operatorname{tang} x' = 0,4908093,$$
$$\operatorname{tang} x' = 3,0960, \quad f(x) = +1,3040.$$

Ainsi la racine est comprise entre 4,4 et 4,5 et très-rapprochée de ce dernier nombre.

L'interpolation par parties proportionnelles donne la correction 0,09. Nous essayerons donc 4,49 :

$$x = 4,49, \quad x' = 77°15'30'', \quad \operatorname{tang} x' = 4,4223, \quad f(x) = +0,0677$$
$$x = 4,50, \quad x' = 77°49'50'', \quad \operatorname{tang} x' = 4,6372, \quad f(x) = -0,1372$$

La racine est comprise entre 4,49 et 4,50. L'interpolation par parties proportionnelles donne $\alpha = 0,0033$ par défaut; on essayera donc 4,4934 :

$$x = 4,4934, \quad x' = 77°27'10''3, \quad \operatorname{tang} x' = 4,493210, \quad f(x) = +0,000190$$
$$x = 4,4935, \quad x' = 77°27'30''9, \quad \operatorname{tang} x' = 4,495328, \quad f(x) = -0,001828.$$

La racine est comprise entre 4,4934 et 4,4935 et très-rapprochée du premier de ces nombres. L'interpolation donne $\frac{\alpha}{h} = \frac{190}{2018} = 0,094$. On aura donc

$$x = 4,4934094.$$

239. EXEMPLE V. Soit l'équation

$$e^x - e^{-x} = ax,$$

que l'on a à résoudre dans le problème de la chaînette, c'est-à-dire lorsqu'on cherche la forme d'équilibre d'une chaîne pesante. Prenons $a = 12,54$, on a

$$f(x) = e^x - e^{-x} - 12,54 \times x = 0,$$
$$f'(x) = e^x + e^{-x} - 12,54,$$
$$f''(x) = e^x - e^{-x}.$$

On calculera e^x et e^{-x} par les formules

$$\log e^x = Mx = 0,4342944482 \times x,$$
$$\log e^{-x} = -\log e^x.$$

L'équation est vérifiée pour $x = 0$; mais elle admet en outre une racine positive que nous nous proposons de déterminer. La valeur $x = 1$ donne évidemment un résultat négatif, et de même $x = 2$. Substituons les nombres suivants :

$$x = 3, \quad e^x = 20, \quad f(x) = -17,$$
$$x = 4, \quad e^x = 55, \quad f(x) = +5.$$

La racine est comprise entre 3 et 4. L'interpolation donne $\alpha = 0,8$. Essayons 3,8 :

$$x = 3,8, \quad e^x = 44,7012, \quad e^{-x} = 0,0224, \quad f(x) = -2,9732,$$
$$x = 3,9, \quad e^x = 49,4025, \quad e^{-x} = 0,0202, \quad f(x) = +0,4763.$$

La racine est comprise entre 3,8 et 3,9.

La méthode d'approximation de Newton donne

$$\alpha = -\frac{0,4763}{36,8827} = -0,01291 \ldots \ldots$$

La fonction suit la marche indiquée par la figure 3 du n° 229, et l'on a

$$\varepsilon < \frac{\alpha^2 f''(3,9)}{2f'(3,9)} < \alpha^2 \times 0,7.$$

La quantité α étant moindre que 0,1, l'erreur ε est moindre que 0,007; on en conclut que la valeur de α est plus petite que $0,013 + 0,007$ ou 0,02. D'après cela, on a

$$\varepsilon < 0,02^2 \times 0,7 = 0,00028.$$

Il en résulte que la valeur de α est comprise entre $-0,01291$ et $-0,01320$. On prendra $\alpha = -0,013$ et l'on aura $x = 3,887$ avec trois décimales exactes.

240. Exemple VI. La détermination du mouvement d'une planète ou d'une comète autour du soleil se ramène à la résolution de l'équation

$$u - e \sin u = \zeta,$$

dans laquelle la lettre ζ désigne un angle donné, u un angle cherché, e l'excentricité de l'orbite divisée par $\sin 1''$.

Quand on obtient cette équation, ζ et u désignent des longueurs d'arc, e l'excentricité; on la transforme en changeant les arcs en angles. Soit x le nombre qui mesure la longueur d'un arc, le rayon étant pris pour unité; on sait que, dans la construction des tables trigonométriques, la longueur de l'arc d'une seconde a été prise pour le sinus de l'angle d'une seconde; le quotient $x' = \frac{x}{\sin 1''}$ exprimera donc combien l'angle qui correspond à l'arc x contient de fois l'angle d'une seconde. Ainsi, pour transformer un arc en angle, l'angle de $1''$ étant pris pour unité, il suffit de le diviser par $\sin 1''$. Si donc on divise par $\sin 1''$ tous les termes de l'équation $u - e \sin u = \zeta$, on obtient l'équation $u' - \frac{e}{\sin 1''} \sin u' = \zeta'$.

Quand il s'agit des planètes dont les orbites ont, en général, des excentricités très-petites, on peut résoudre l'équation par la méthode des approximations successives. Écrivons, en effet, l'équation sous la forme

$$u = \zeta + e \sin u.$$

En négligeant le second terme du second membre, on a une première valeur approchée $u_0 = \zeta$. Substituant cette valeur dans le second membre, on a une seconde valeur $u_1 = \zeta + e \sin \zeta$ plus approchée que la première. Substituant cette seconde valeur approchée dans le second membre, on a une troisième valeur encore plus approchée $u_2 = \zeta + e \sin u_1$, et ainsi de suite.

Prenons $\zeta = 62°28'54'',6$ et l'excentricité $0{,}01679226$ de l'orbite terrestre. On cherche d'abord

$$\log e = \log \frac{0{,}01679226}{\sin 1''} = 3{,}5395343,$$

qui servira dans tout le cours du calcul. Calculons par logarithmes la première correction $e \sin \zeta$:

$$\begin{aligned} \log e &= 3{,}5395343 \\ \log \sin \zeta &= \bar{1}{,}9478572 \\ &\overline{3{,}4873915} \\ e \sin \zeta = 0°51'11'',8;\ \ u_1 &= 63°20'6'',4. \end{aligned}$$

Calculons de même la seconde correction $e \sin u_1 - e \sin \zeta$:

$$\begin{aligned} \log e &= 3{,}5395343 \\ \log \sin u_1 &= \bar{1}{,}9511658 \\ \log 0°51'35'',3\ldots &= 3{,}4907001 \\ e \sin u_1 - e \sin \zeta = 23'',5;\ \ u_2 &= 63°20'30'',1. \end{aligned}$$

Calculons ensuite la troisième correction $e \sin u_2 - e \sin u_1$:

$$\log e = 3{,}5395343$$
$$\log \sin u_2 = \bar{1}{,}9511908$$
$$\log 0°51'35'',5 \,;\ \ldots = 3{,}4907251$$
$$e \sin u_2 - e \sin u_1 = 0'',2 \,;\ u_2 = 63°20'30'',3.$$

On voit que les corrections deviennent de plus en plus petites; la correction suivante n'aurait pas d'influence sur les dixièmes de seconde. Le calcul se fait très-rapidement, parce qu'on se sert toujours de la même partie des tables.

Exercices.

1° Partager un demi-cercle en deux parties équivalentes par une droite parallèle au diamètre.

2° Calculer les racines réelles des équations

(1) $$(4 - 3x^2)\sin x - 4x\cos x = 0,$$

(2) $$(e^x + e^{-x})\cos x - 2 = 0,$$

(3) $$(e^x + e^{-x})\cos x + 2 = 0,$$

(4) $$1 - x + \frac{x^2}{(1.2)^2} - \frac{x^3}{(1.2.3)^2} + \frac{x^4}{(1.2.3.4)^2} - \ldots = 0,$$

(5) $$1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{3.2^2} - \frac{x^3}{4(2.3)^2} + \frac{x^4}{5(2.3.4)^2} - \ldots = 0.$$

On rencontre l'équation (1) dans l'étude des vibrations d'une sphère élastique, les équations (2) et (3) dans la théorie des vibrations des verges élastiques, l'équation (4), dont le premier membre est une série convergente, dans l'étude de la proportion de la chaleur dans un cylindre, l'équation (5) dans l'étude des vibrations d'une membrane élastique.

CHAPITRE IX.

DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES EN FRACTIONS SIMPLES.

241. On appelle *fraction rationnelle* une fraction algébrique dont les deux termes sont les polynômes entiers d'une même lettre x. Soit $\frac{F(x)}{f(x)}$ une fraction de cette forme. Nous pouvons toujours supposer cette fraction irréductible; car, si les deux polynômes avaient des facteurs binômes communs, on les supprimerait. Lorsque le numérateur est d'un degré plus élevé que le dénominateur, on effectue la division en ordonnant par rapport aux puissances décroissantes de x, ce qui donne un quotient entier et une fraction ayant son numérateur d'un degré moins élevé que le dénominateur. Laissant de côté cette partie entière, nous avons à considérer une fraction irréductible $\frac{F(x)}{f(x)}$, dont le numérateur est d'un degré moins élevé que le dénominateur. Nous désignerons par m le degré du dénominateur, le numérateur étant au plus du degré $m-1$.

Cas des racines inégales.

242. Supposons d'abord que l'équation $f(x)=0$ n'ait pas de racines égales. J'appelle $a, b, c, \ldots\ldots h, k$ les m racines de cette équation, et je pose

$$f(x)=(x-a)f_1(x).$$

Je remplace x par $a + (x - a)$, et, regardant $x - a$ comme un accroissement, je développe les deux polynômes $F(x)$ et $f_1(x)$ suivant les puissances croissantes de $x - a$,

$$F(x) = F(a + \overline{x - a}) = F(a) + F'(a)\frac{x-a}{1} + \ldots\ldots$$

$$f_1(x) = f_1(a + \overline{x - a}) = f_1(a) + f'(a)\frac{x-a}{1} + \ldots\ldots$$

Je divise le premier polynôme par le second, en ordonnant le quotient par rapport aux puissances croissantes de $x - a$; le premier terme du quotient est $\frac{F(a)}{f_1(a)}$; j'appelle A ce premier terme; en multipliant le diviseur par A et retranchant le produit du dividende, on a un reste qui ne contient plus de terme constant; et si l'on met $x - a$ en facteur commun, ce reste peut être représenté par $(x - a)F_1(x)$. Du dividende, qui est au plus du degré $m - 1$, on retranche le produit $Af_1(x)$ qui est du degré $m - 1$, et l'on met $x - a$ en facteur, le polynôme $F_1(x)$ est donc au plus du degré $m - 2$. J'arrête la division à ce premier terme; le dividende étant égal au produit du diviseur par le quotient, plus le reste, on a

$$(1) \qquad F(x) = Af_1(x) + (x - a)F_1(x).$$

En divisant les deux membres par $f(x)$ ou par $(x - a)f_1(x)$, il vient

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{F_1(x)}{f_1(x)}.$$

Ainsi la fraction proposée est égale à une première fraction simple $\frac{A}{x-a}$, plus une fraction rationnelle $\frac{F_1(x)}{f_1(x)}$ de même forme que la première, mais d'un degré moins

élevé; le dénominateur $f_1(x)$ est en effet du degré $m-1$, le numérateur $F_1(x)$ au plus du degré $m-2$. Cette nouvelle fraction est d'ailleurs irréductible comme la proposée; car si les deux termes avaient un facteur premier commun, ce ne pourrait être que l'un des facteurs de $f_1(x)$, par exemple $x-b$; ce facteur, divisant les deux parties qui composent le second membre de l'égalité (1), diviserait leur somme $F(x)$, ce qui est impossible, puisqu'on a supposé qu'aucun des facteurs de $f(x)$ ne divise $F(x)$.

Les mêmes raisonnements s'appliquent à la fraction $\frac{F_1(x)}{f_1(x)}$. Si l'on pose $f_1(x)=(x-b)f_2(x)$, on aura

$$\frac{F_1(x)}{f_1(x)}=\frac{B}{x-b}+\frac{F_2(x)}{f_2(x)};$$

la nouvelle fraction $\frac{F_2(x)}{f_2(x)}$ est aussi irréductible, son dénominateur du degré $m-2$, son numérateur au plus du degré $m-3$.

De même

$$\frac{F_2(x)}{f_2(x)}=\frac{C}{x-c}+\frac{F_3(x)}{f_3(x)};$$

en continuant de cette manière, on arrivera enfin à une fraction du premier degré

$$\frac{F_{m-1}(x)}{f_{m-1}(x)}=\frac{K}{x-k}.$$

Si l'on ajoute toutes ces égalités, les fractions intermédiaires disparaissent, et l'on a

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\ldots\ldots+\frac{K}{x-k}.$$

Ainsi *la fraction rationnelle est décomposable en une*



somme de fractions simples, ayant respectivement pour dénominateurs les facteurs premiers qui composent le dénominateur de la fraction proposée et pour numérateurs des constantes.

243. Je dis maintenant que la fraction proposée *n'est décomposable qu'en un seul système de fractions simples.* On démontre, en effet, que deux systèmes de fractions simples

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\ldots\ldots+\frac{K}{x-k},$$
$$\frac{A'}{x-a'}+\frac{B'}{x-b'}+\ldots\ldots+\frac{K'}{x-k'},$$

égaux pour toutes les valeurs de x sont identiques. Multiplions par $x-a$, il vient

$$A+(x-a)\left[\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\ldots\ldots\right]$$
$$=(x-a)\left[\frac{A'}{x-a'}+\frac{B'}{x-b'}+\ldots\ldots\right].$$

Donnons maintenant à x la valeur particulière a; le premier membre se réduit à A; si aucun des dénominateurs des fractions du second système n'était égal à $x-a$, le second membre s'évanouirait quand on fait $x=a$; il faut donc que l'un de ces dénominateurs soit égal à $x-a$. Supposons, par exemple, $a'=a$; alors on a

$$A+(x-a)\left[\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\ldots\ldots\right]$$
$$=A'+(x-a)\left[\frac{B'}{x-b'}+\frac{C'}{x-c'}+\ldots\ldots\right],$$

et si l'on fait $x=a$, on en déduit $A'=A$. Ainsi la fraction $\frac{A}{x-a}$ du premier système fait partie du second. Suppri-

mons ces deux fractions égales, il reste deux systèmes égaux

$$\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\ldots\ldots=\frac{B'}{x-b'}+\frac{C'}{x-c'}+\ldots\ldots$$

On démontrerait de même que la fraction $\frac{B}{x-b}$ du premier appartient au second, et ainsi de suite. Alors les deux systèmes sont identiques.

244. Calcul des numérateurs. Nous avons trouvé

$$A=\frac{F(a)}{f_1(a)}.$$

Le premier numérateur A est la valeur de la fraction

$$\frac{F(x)}{\left(\frac{F(x)}{x-a}\right)}$$

quand on y fait $x=a$.

De même le second numérateur B est la valeur de la fraction

$$\frac{F(x)}{\left(\frac{f(x)}{x-b}\right)},$$

quand on y fait $x=b$, etc.

On peut aussi calculer ces constantes au moyen de la dérivée de la fonction $f(x)$. En effet, nous avons posé

$$f(x)=(x-a)f_1(x);$$

si l'on prend les dérivées des deux membres, il vient

$$f'(x)=f_1(x)+(x-a)f_1'(x),$$

et, en faisant $x = a$,

$$f'(a) = f_1(a).$$

On en déduit

$$A = \frac{F(a)}{f'(a)}.$$

On aura de même

$$B = \frac{F(b)}{f'(b)}, \quad C = \frac{F(c)}{f'(c)}, \ldots\ldots$$

Ainsi *les numérateurs des fractions simples sont les diverses valeurs que prend la fraction* $\frac{F(x)}{f'(x)}$, *quand on y remplace successivement* x *par chacune des racines* a, b, ... k *de l'équation* $f(x) = 0$.

Exemples.

1° Soit à décomposer la fraction

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{2x^3 + 5x^2 - 6}{x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x}.$$

En résolvant l'équation

$$x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x = 0,$$

on obtient les quatre racines simples $0,\ 1,\ -1,\ -2$. Ainsi la fraction rationnelle se décomposera en quatre fractions simples de la forme

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{x+2}.$$

Pour calculer les numérateurs, nous nous servirons de la dérivée

$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 2x - 2,$$

ce qui donne

$$A = \frac{F(0)}{f'(0)} = \frac{-6}{-2} = 3,$$
$$B = \frac{F(1)}{f'(1)} = \frac{1}{6},$$
$$C = \frac{F(-1)}{f'(-1)} = \frac{-3}{2},$$
$$D = \frac{F(-2)}{f'(-2)} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}.$$

Nous avons donc

$$\frac{2x^3 + 5x^2 - 6}{x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x} = \frac{3}{x} + \frac{\frac{1}{6}}{x-1} - \frac{\frac{3}{2}}{x+1} + \frac{\frac{1}{3}}{x+2}.$$

2° Soit à décomposer la fraction

$$\frac{x^2 + 1}{(x+1)(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

La fraction proposée se décomposera de la manière suivante

$$\frac{x^2+1}{(x+1)(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x-3}.$$

On peut déterminer les constantes immédiatement et sans l'aide d'aucune formule par la méthode des *coefficients indéterminés.* Si l'on multiplie par le dénominateur, l'égalité précédente devient

$$x^2 + 1 = A(x-1)(x-2)(x-3) + B(x+1)(x-2)(x-3)$$
$$+ C(x+1)(x-1)(x-3) + D(x+1)(x-1)(x-2).$$

Cette égalité doit avoir lieu, quelle que soit la valeur de x. Donnons à x successivement la valeur de chacune des racines -1. $1, 2, 3$, tous les termes du second membre s'éva-

vanouissent, excepté un, et l'on a les relations

$$2=-24A,\quad 2=4B,\quad 5=-3C,\quad 10=8D;$$

d'où l'on déduit les valeurs des constantes

$$A=-\frac{1}{12},\quad B=\frac{1}{2},\quad C=-\frac{5}{3},\quad D=\frac{5}{4}.$$

Cas des racines multiples.

245. Supposons que a soit une racine de l'équation $f(x)=0$ d'un ordre n de multiplicité. Nous poserons

$$f(x)=(x-a)^n f_1(x),$$

et après avoir développé comme précédemment les deux polynômes $F(x)$ et $f_1(x)$ suivant les puissances croissantes de $x-a$,

$$F(x)=F(a+x-a)=F(a)+F'(a)\frac{x-a}{1}+\ldots\ldots$$

$$f_1(x)=f_1(a+x-a)=f_1(a)+f_1'(a)\frac{x-a}{1}+\ldots\ldots,$$

nous effectuerons la division du premier par le second, ordonnant le quotient suivant les puissances croissantes de $x-a$ et poussant l'opération jusqu'au terme du degré $n-1$; représentons ce quotient par

$$A_0+A_1(x-a)+A_2(x-a)^2+\ldots\ldots+A_{n-1}(x-a)^{n-1},$$

le reste de la division contenant à tous ses termes le facteur $(x-a)^n$ peut être mis sous la forme $(x-a)^n F_1(x)$. On a ainsi

$$F(x)=[A_0+A_1(x-a)\ldots..+A_{n-1}(x-a)^{n-1}]f_1(x)+(x-a)^n F_1(x).$$

Le diviseur étant du degré $m-n$, et le quotient du degré

$n-1$, le produit du diviseur par le quotient est du degré $m-1$, et comme le dividende est au plus du degré $m-1$, la différence ou le reste de la division sera au plus du degré $m-1$; puisqu'on a mis $(x-a)^n$ en facteur, il en résulte que le polynôme $F_1(x)$ est au plus du degré $m-n-1$. Il est évident, d'ailleurs, que les deux polynômes $f_1(x)$ et $F_1(x)$ sont premiers entre eux; car s'ils avaient un facteur commun, ce facteur diviserait $f(x)$ et $F(x)$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Divisons maintenant par $f(x)$ ou par $(x-a)^n f_1(x)$ les deux membres de l'égalité précédente, il vient

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A_0}{(x-a)^n} + \frac{A_1}{(x-a)^{n-1}} + \ldots\ldots + \frac{A_{n-1}}{x-a} + \frac{F_1(x)}{f_1(x)}.$$

Ainsi le facteur multiple $(x-a)^n$ donne lieu à une série de n fractions simples, et nous avons encore à décomposer la fraction irréductible $\frac{F_1(x)}{f_1(x)}$, dont le dénominateur est du degré $m-n$, le numérateur au plus du degré $m-n-1$.

Supposons que l'équation $f(x)=0$ contienne une seconde racine b d'un degré p de multiplicité; nous poserons $f_1(x)=(x-b)^p f_2(x)$, et nous aurons de même

$$\frac{F_1(x)}{f_1(x)} = \frac{B_0}{(x-b)^p} + \frac{B_1}{(x-b)^{p-1}} + \ldots\ldots + \frac{B_{p-1}}{x-b} + \frac{F_2(x)}{f_2(x)}.$$

S'il y a une troisième racine c d'ordre q, on aura encore

$$\frac{F_2(x)}{f_2(x)} = \frac{C_0}{(x-c)^q} + \frac{C_1}{(x-c)^{q-1}} + \ldots\ldots + \frac{C_{q-1}}{x-c} + \frac{F_3(x)}{f_3(x)}.$$

S'il n'y a pas d'autre racine multiple, le polynôme $f_3(x)$ ne contenant plus que des facteurs simples, on aura, d'après ce qui a été dit plus haut,

$$\frac{F_3(x)}{f_3(x)} = \frac{D}{x-d} + \frac{E}{x-e} + \ldots\ldots + \frac{K}{x-k}.$$

En ajoutant toutes ces inégalités, on trouve enfin

$$\begin{aligned}\frac{F(x)}{f(x)} = & \frac{A_0}{(x-a)^n} + \frac{A_1}{(x-a)^{n-1}} + \ldots\ldots + \frac{A_{n-1}}{x-a} \\ & + \frac{B_0}{(x-b)^p} + \frac{B_1}{(x-b)^{p-1}} + \ldots\ldots + \frac{B_{n-1}}{x-b} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{D}{x-d} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{K}{x-k}.\end{aligned}$$

A chaque racine multiple correspond un groupe de fractions simples. La première fraction de chaque groupe existe nécessairement, mais les autres peuvent manquer ; en effet, quand on effectue la division des polynômes $F(x)$ et $f_1(x)$ ordonnés comme nous l'avons dit, les premiers termes $F(a)$ et $f_1(a)$ ne sont pas nuls, et par conséquent le premier terme $A_0 = \frac{F(a)}{f_1(a)}$ du quotient n'est ni nul ni infini ; mais, parmi les termes suivants, quelques-uns peuvent avoir des coefficients nuls.

246. Je dis maintenant que *la fraction proposée n'est décomposable qu'en un seul système de fractions simples.*

Soient

$$\frac{A_0}{(x-a)^n} + \frac{A_1}{(x-a)^{n-1}} + \ldots\ldots + \frac{B_0}{(x-b)^p} + \frac{B_1}{(x-b)^{p-1}} + \ldots\ldots,$$
$$\frac{A'_0}{(x-a')^{n'}} + \frac{A'}{(x-a')^{n'-1}} + \ldots\ldots + \frac{B'_0}{(x-b')^p} + \frac{B'_1}{(x-b')^{p'-1}} + \ldots\ldots,$$

deux systèmes égaux entre eux, quelle que soit la valeur de x. Multiplions les deux expressions par $(x-a)^n$ et faisons $x=a$; la première se réduit à A_0 ; si aucune des frac-

tions du second système n'avait pour dénominateur une puissance de $x-a$, le second membre s'évanouirait quand on fait $x=a$; il faut donc que certaines fractions du second système aient pour dénominateurs des puissances de $x-a$. Soit $a'=a$; je dis que $n'=n$; car si les deux exposants différaient, si, par exemple, n était plus grand que n', en multipliant par $(x-a)^n$, on verrait que pour $x=a$ le premier membre se réduirait à A_0, tandis que le second s'évanouirait; on a donc aussi $n'=n$. Mais alors l'égalité devient, après la multiplication par $(x-a)^n$,

$$A_0+A_1(x-a)+\ldots\ldots+(x-a)^n\left[\frac{B_0}{(x-b)^p}+\ldots\ldots\right]$$
$$=A'_0+A'_1(x-a)+\ldots\ldots+(x-a)^n\left[\frac{B'_0}{(x-b')^{p'}}+\ldots\ldots\right];$$

si l'on fait $x=a$, on en déduit $A_0=A'_0$. Ainsi la première fraction du premier système se retrouve dans le second. En supprimant ces deux fractions égales et recommençant le même raisonnement, on verrait que la seconde s'y trouve également, et ainsi de suite. Donc les deux systèmes sont identiques.

Exemple.

Soit à décomposer la fraction rationnelle

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{4x^3-5x+2}{x^6-x^5-x^4+x^3}.$$

Le dénominateur

$$f(x)=x^3(x-1)^2(x+1)$$

contenant un facteur triple, un facteur double et un facteur simple, la fraction proposée se développera en fractions

simples de la forme suivante

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A_0}{x^3}+\frac{A_1}{x^2}+\frac{A_2}{x}+\frac{B_0}{(x-1)^2}+\frac{B_1}{x-1}+\frac{C}{x+1}.$$

Calculons les trois constantes qui se rapportent au facteur triple x. Nous ordonnons par rapport aux puissances croissantes de x,

$$F(x)=2-5x+4x^3,$$
$$f_1(x)=(x-1)^2(x-1)=1-x-x^2+x^3,$$

et nous effectuons la division jusqu'à ce que nous arrivions au terme du second degré, en remarquant que dans ce calcul il est inutile d'écrire les termes d'un degré supérieur au second, ce qui abrége l'opération,

$$\begin{array}{r|l} 2-5x & 1-x-x^2 \\ \hline -3x+2x^2 & 2-3x-x^2. \\ -\ x^2 & \end{array}$$

Puisque le quotient a été représenté par $A_0+A_1x+A_2x^2$, on a

$$A_0=2,\quad A_1=-3,\quad A_2=-1.$$

Calculons maintenant les coefficients qui se rapportent au facteur double $x-1$. On peut supposer que l'on commence la décomposition par ce facteur. Nous développerons jusqu'au premier degré, en négligeant les termes suivants,

$$F(x)=F(1+x-1)=F(1)+F'(1)(x-1)+\ldots..=1+7(x-1)+\ldots..$$
$$f_1(x)=x^3(x+1)=x^4+x^3=f_1(1)+f_1'(1)(x-1)+\ldots=2+7(x-1)+\ldots$$

et nous effectuerons la division

$$\begin{array}{r|l} 1+7(x-1) & 2+7(x-1) \\ \hline +\frac{7}{2}(x-1) & \frac{1}{2}+\frac{7}{4}(x-1). \end{array}$$

Ce quotient a été représenté par $B_0 + B_1(x-1)$; on a donc

$$B_0 = \frac{1}{2}, \quad B_1 = \frac{7}{4}.$$

Quant au coefficient C qui se rapporte au facteur simple $(x+1)$, on l'obtient par la règle ordinaire

$$C = \frac{F(-1)}{f'(-1)} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}.$$

On a ainsi

$$\frac{4x^3-5x+2}{x^6-x^5-x^4+x^3} = \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{\frac{1}{2}}{(x-1)^2} + \frac{\frac{7}{4}}{x-1} - \frac{\frac{3}{4}}{x+1}.$$

On peut employer aussi la méthode des coefficients indéterminés. On a posé

$$\frac{4x^3-5x+2}{x^6-x^5-x^4+x^3} = \frac{A_0}{x^3} + \frac{A_1}{x^2} + \frac{A_2}{x} + \frac{B_0}{(x-1)^2} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{C}{x+1}.$$

Si l'on chasse les dénominateurs, cette égalité devient

$$\begin{aligned} 4x^3 - 5x + 2 = {} & (A_0 + A_1 x + A_2 x^2)(x-1)^2(x+1) \\ & + [B_0 + B_1(x-1)]x^3(x+1) + Cx^3(x-1)^2. \end{aligned}$$

En donnant successivement à x les valeurs 0, 1, -1, on a

$$2 = A_0, \quad 1 = 2B_0, \quad 3 = -4C,$$

d'où

$$A_0 = 2, \quad B_0 = \frac{1}{2}, \quad C = -\frac{3}{4}.$$

Prenons les dérivées des deux membres de l'égalité précédente, ce qui donne

$$\begin{aligned} 12x^2-5 = {} & (A_1+2A_2x)(x-1)^2(x+1) + (A_0+A_1x+A_2x^2)[2(x-1)(x+1)+(x-1)^2] \\ & + B_1x^3(x+1) + [B_0+B_1(x-1)][3x^2(x+1)+x^3] \\ & + 3Cx^2(x-1)^2 + 2Cx^3(x-1), \end{aligned}$$

et dans cette dernière égalité, faisons $x=0$ et $x=1$, nous aurons

$$-5=A_1-A_0, \quad 7=2B_1+7B_0,$$

d'où

$$A_1=-3, \quad B_1=\frac{7}{4}.$$

Il ne reste plus que la constante A_2 à déterminer ; pour cela nous prendrons encore une fois la dérivée et nous y ferons $x=0$. Il suffit d'écrire les termes qui ne contiennent pas le facteur x,

$$\begin{aligned}24x = 2A_2(x-1)^2(x+1) + 2A_1[2(x-1)(x+1)+(x-1)^2] \\ + A_0[2(x+1)+4(x-1)] + \ldots\ldots\end{aligned}$$

Si l'on fait $x=0$, il vient

$$0=2A_2-2A_1-2A_0,$$

d'où

$$A_2=-1.$$

Cas des racines imaginaires.

247. La décomposition de la fraction rationnelle $\frac{F(x)}{f(x)}$ est vraie d'une manière générale, quelles que soient les racines de l'équation $f(x)=0$, réelles ou imaginaires. Supposons que les deux polynômes qui composent la fraction proposée aient tous leurs coefficients réels ; dans ce cas, si l'équation admet une racine imaginaire simple $\alpha+\beta i$, elle admettra la racine conjuguée $\alpha-\beta i$. A ces deux racines correspondent dans le développement des fractions simples de la forme

$$\frac{A+Bi}{x-\alpha-\beta i}, \quad \frac{A-Bi}{x-\alpha+\beta i};$$

les numérateurs de ces deux fractions sont des quantités imaginaires conjuguées; car la seconde se déduit évidemment de la première par le changement du signe de i. Si l'on veut éviter les imaginaires dans la décomposition, il suffit d'ajouter ces deux fractions simples, ce qui donne

$$\frac{A+Bi}{x-\alpha-\beta i}+\frac{A-Bi}{x-\alpha+\beta i}=\frac{2A(x-\alpha)-2B\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2}.$$

Ainsi, à une couple de racines simples imaginaires conjuguées correspond une fraction réelle de la forme

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q},$$

ayant son dénominateur du second degré et son numérateur du premier degré.

248. Nous avons supposé dans ce qui précède que les racines imaginaires conjuguées sont simples; supposons maintenant qu'elles soient d'un degré n de multiplicité, et, pour abréger, représentons par x^2+px+q le produit $(x-\alpha)^2+\beta^2$ des deux facteurs binômes du premier degré. Nous allons démontrer que la partie qui, dans le développement, correspond à ces deux racines imaginaires conjuguées d'ordre n, peut être ramenée à une somme de n fractions de la forme

$$\frac{M_0x+N_0}{(x^2+px+q)^n}+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+p)^{n-1}}\cdots\cdots+\frac{M_{n-1}x+N_{n-1}}{x^2+px+q}.$$

dont les numérateurs sont réels et du premier degré.

Posons $f(x)=(x^2+px+q)^n f_1(x)$. On peut disposer des deux constantes M_0 et N_0 de manière que le polynôme

$$(2) \qquad F(x)-(M_0x+N_0)f_1(x)$$

soit divisible par x^2+px+q. Il suffit pour cela que ce polynôme s'annule pour $x=\alpha+\beta i$ et pour $x=\alpha-\beta i$; si nous remplaçons x par chacune de ces deux valeurs et si nous appelons $A\pm Bi$ et $C\pm Di$ les valeurs correspondantes des fonctions $F(x)$ et $f_1(x)$, nous obtiendrons les deux relations

$$(A+Bi)-[M_0(\alpha+\beta i)+N_0](C+Di)=0,$$
$$(A-Bi)-[M_0(\alpha-\beta i)+N_0](C-Di)-0.$$

On en déduit, en égalant séparément à zéro la partie réelle et la partie imaginaire,

$$(\beta D-\alpha C)M_0-CN_0=-A,$$
$$(\beta C+\alpha D)M_0+DN_0=B.$$

Ces équations entre M_0 et N_0 sont du premier degré; le dénominateur commun des inconnues $\beta(C^2+D^2)$ n'est pas nul; car si β était nulle, les racines ne seraient pas imaginaires; si C^2+D^2 était nulle, le polynôme $f_1(x)$ contiendrait encore le facteur x^2+px+q. On trouve ainsi pour M_0 et N_0 des valeurs réelles finies et déterminées.

Le polynôme (2) devenant de cette manière divisible par x^2+px+q, si l'on appelle $\varphi(x)$ le quotient entier, on aura

$$F(x)-(M_0x+N_0)f_1(x)=(x^2+px+q)\varphi(x),$$

d'où l'on déduit

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{M_0x+N_0}{(x^2+px+q)^n}+\frac{\varphi(x)}{(x^2+px+q)^{n-1}f_1(x)}.$$

On aurait de même

$$\frac{\varphi(x)}{(x^2+px+q)^{n-1}f_1(x)}=\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^{n-1}}+\frac{\varphi(x)}{(x^2+px+)^{n-2}f_1(x)},$$

et ainsi de suite.

Exemples.

1° Décomposer la fraction

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{x^3+5}{x^4+x^3+x^2+x} = \frac{x^3+5}{x(x+1)(x^2+1)}.$$

On a deux racines réelles o et —1 et deux racines imaginaires $+i$ et $-i$. Si l'on ne veut pas de quantités imaginaires dans les développements, on écrira

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Pour calculer les numérateurs, on emploiera de préférence dans ce cas la méthode des coefficients indéterminés. Si l'on multiplie par $f(x)$, l'égalité précédente devient

$$x^3+5 = A(x+1)(x^2+1) + Bx(x^2+1) + (Cx+D)x(x+1).$$

Si l'on y fait successivement $x=0$ et $x=-1$, on trouve

$$A=5, \quad B=-2.$$

Il reste à déterminer les deux constantes C et D qui correspondent aux racines imaginaires. On égalera les coefficients de x^3 et de x^2 dans les deux membres de l'égalité, ce qui donne les relations

$$1 = A+B+C;$$
$$0 = A+C+D;$$

d'où l'on déduit

$$C=-2, \quad D=-3.$$

Ainsi

$$\frac{x^3+5}{x^4+x^3+x^2+x} = \frac{5}{x} - \frac{2}{x+1} - \frac{2x+3}{x^2+1}.$$

2° Décomposer la fraction

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2}.$$

On a une racine simple o et deux racines imaginaires conjuguées doubles $\pm i$. La fraction se décomposera donc sous la forme suivante

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{(x^2+1)^2}+\frac{B'x+C'}{x^2+1}.$$

Si l'on chasse les dénominateurs, on a l'égalité

$$1=A(x^2+1)^2+(Bx+C)x+(B'x+C')x(x^2+1).$$

Faisant $x=0$, il vient $A=1$. Égalant ensuite dans les deux membres les coefficients des mêmes puissances de x, on obtient les relations

$$A+B'=0,\quad C'=0,\quad 2A+B+B'=0,\quad C+C'=0;$$

d'où l'on déduit

$$B'=-1,\quad C'=0,\quad B=-1,\quad C=0.$$

On a ainsi

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{x}{(x^2+1)^2}-\frac{x}{x^2+1}.$$

Note A. *Formule générale pour la résolution des équations du premier degré.*

249. Soient n lettres $a, b, c, \ldots\ldots h$. Considérons l'expression

$$abc\ldots h \times (b-a) \times (c-a)(c-b) \times (d-a)(d-b)(d-c) \times \ldots\ldots \times (h-a)(h-b)\ldots\ldots(h-g).$$

On a mis d'abord le produit des n quantités, et, pour former les facteurs binômes, on a écrit à la suite de chaque lettre successivement chacune des lettres précédentes. Le nombre des facteurs binômes est égal au nombre des combinaisons des n lettres deux à deux, c'est-à-dire à $\frac{n(n-1)}{2}$; le facteur $abc\ldots\ldots h$ étant du degré n, le degré de chacun des termes du produit est $\frac{n(n-1)}{2}+n$, ou $\frac{n(n+1)}{2}$. Le polynôme ainsi formé jouit de propriétés remarquables que nous allons démontrer.

Nous remarquons d'abord que, si l'on permute deux lettres quelconques dans le polynôme, on reproduit le même polynôme avec des signes contraires. Permutons par exemple les deux lettres b et d; le facteur $abc\ldots h$ ne change pas; les facteurs binômes qui ne contiennent aucune des deux lettres b et d ne changent pas non plus; les facteurs qui ne contiennent qu'une seule de ces lettres donnent des groupes tels que

$$(b-a)(d-a), \quad (c-b)(d-c), \quad (f-b)(f-d),$$

qui ne changent pas par la permutation des lettres b et d; il reste à considérer le facteur $d-b$ qui renferme les deux

lettres; ce facteur devient $b-d$ ou $-d+b$, et change de signe; il en résulte que l'on obtiendra les différents termes du second polynôme en changeant simplement les signes de tous les termes du premier polynôme. Mais on obtient aussi ce second polynôme en permutant les deux lettres b et d dans le premier; ainsi, quand on permute deux lettres quelconques dans le polynôme proposé, on reproduit le même polynôme avec des signes contraires; par conséquent, quand on permute deux lettres quelconques dans le polynôme proposé, et qu'on change les signes de tous les termes, on reproduit le polynôme proposé.

On conclut de là, que si dans un terme du polynôme on permute deux lettres et qu'on change le signe, on obtiendra un autre terme du polynôme. Supposons qu'un terme contienne deux lettres affectées du même exposant, la permutation de ces deux lettres ne changeant pas la valeur du terme, on voit qu'à ce terme en correspond un autre égal et de signe contraire; si l'on supprime les termes qui se détruisent deux à deux, le polynôme ne contiendra plus que des termes dans lesquels tous les exposants seront différents. Une même lettre n'entrant que dans $n-1$ facteurs binômes, les exposants dont les lettres sont affectées dans les différents termes du produit seront au plus égaux à n; comme la somme des exposants dans chaque terme, ou le degré du terme, doit être égal à $\frac{n(n+1)}{2}$, on en conclut que chaque terme doit contenir toutes les lettres affectées des exposants $1, 2, 3, \ldots, n$. Imaginons que, dans chaque terme du produit, on dispose les lettres suivant l'ordre des exposants; le nombre des termes du produit, après la suppression des termes qui se détruisent deux à deux, sera égal évidemment au nombre des arrangements, ou des permu-

tations, que l'on peut former avec les n lettres (n° 27). Le premier terme, celui que l'on obtient quand on prend les premiers termes dans tous les facteurs binômes, est

$$a^1b^2c^3 \ldots\ldots h^n.$$

De celui-là on pourra déduire tous les autres en permutant deux lettres plusieurs fois successivement et changeant le signe à chaque permutation.

Si deux lettres, telles que a et b, deviennent égales entre elles, le facteur $b-a$ se réduisant à zéro, il est clair que le produit est nul. Mais il faut remarquer en outre que les termes du produit se détruisent deux à deux. Soit, par exemple, le terme $\pm a^1d^2b^3c^4\ldots$; si dans ce terme on permute les deux lettres a et b, et qu'on change le signe, on obtient un autre terme $\mp b^1d^2a^3c^4\ldots$ du produit; or, quand on fait $a=b$, ces deux termes, devenant égaux et de signes contraires, se détruisent.

250. Dans le polynôme précédent que nous avons défini par un produit de facteurs binômes, concevons que l'on remplace les exposants par des indices, il est évident que les mêmes propriétés subsisteront. Le premier terme de ce nouveau polynôme sera

$$a_1b_2c_3 \ldots\ldots h_n.$$

Si l'on permute deux lettres quelconques, et qu'on change les signes, on reproduira le même polynôme. On pourra donc du premier terme déduire tous les termes en permutant deux lettres plusieurs fois successivement et changeant le signe à chaque permutation. Si deux lettres deviennent égales, les termes se détruiront encore deux à deux, et le polynôme deviendra égal à zéro.

Le polynôme que nous venons de former s'appelle le *dé-*

terminant relatif au système des quantités contenues dans le tableau suivant :

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1, & \ldots\ldots & h_1, \\ a_2, & b_2, & c_2, & \ldots\ldots & h_2, \\ a_3, & b_3, & c_3, & \ldots\ldots & h_3, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_n, & b_n, & c_n, & \ldots\ldots & h_n. \end{vmatrix}$$

Chaque terme du déterminant contient comme facteur un nombre de chacune des lignes horizontales et un seul, et de même un nombre de chacune des colonnes verticales.

Il a été démontré que, lorsqu'on remplace les nombres d'une colonne verticale par ceux d'une autre colonne verticale, le déterminant est identiquement nul. De même, quand on remplace les nombres d'une ligne horizontale par ceux d'une autre ligne horizontale, le déterminant est identiquement nul ; considérons, par exemple, le terme $\pm a_1 d_2 b_3 c_4 \ldots\ldots$; la permutation des deux indices 1 et 3 dans ce terme, revenant à la permutation des deux lettres a et b, donne un terme de signe contraire $\mp a_3 d_2 b_1 c_4 \ldots\ldots$; quand deux indices deviennent égaux, les termes deviennent donc égaux et de signes contraires, et le polynôme s'annule.

251. Un système de n équations du premier degré à n inconnues peut être mis sous la forme suivante :

$$\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + \ldots\ldots + h_1 v = k_1, \\ a_2 x + b_2 y + \ldots\ldots + h_2 v = k_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n x + b_n x + \ldots\ldots + h_n v = k_n. \end{array}$$

Imaginons formé le déterminant relatif au système des coef-

ficients des inconnues dans ces équations, et représentons par D ce polynôme. Tous les termes contenant la lettre a une fois et seulement une fois, nous pourrons ordonner ce polynôme par rapport à $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$,

$$D = A_1 a_1 + A_2 a_2 + \ldots\ldots + A_n a_n,$$

les quantités A_1, A_2, ... ne contenant plus la lettre a. Nous savons que, si l'on remplace la lettre a par l'une des autres lettres, le polynôme devient nul; on a donc les relations

$$\begin{array}{l} A_1 b_1 + A_2 b_2 + \ldots\ldots + A_n b_n = 0, \\ A_1 c_1 + A_2 c_2 + \ldots\ldots + A_n c_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_1 h_1 + A_2 h_2 + \ldots\ldots + A_n h_n = 0. \end{array}$$

Cela posé, multiplions les équations proposées, la première par A_1, la seconde par A_2, la troisième par A_3, ..., la dernière par A_n et ajoutons, le coefficient de x sera le polynôme D; les coefficients des autres inconnues, d'après les relations précédentes, seront nuls; on aura donc

$$Dx = A_1 k_1 + A_2 k_2 + \ldots\ldots + A_n k_n,$$

d'où

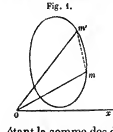
$$x = \frac{A_1 k_1 + A_2 k_2 + \ldots\ldots + A_n k_n}{A_1 a_1 + A_2 a_2 + \ldots\ldots + A_n a_n}.$$

Le déterminant est le dénominateur commun. On obtient le numérateur relatif à chaque inconnue en remplaçant dans le dénominateur les coefficients de l'inconnue par les seconds membres des équations.

NOTE B. — *Théorème sur le nombre des racines d'une équation algébrique.*

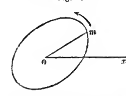
252. Nous avons expliqué (n° 146) comment on représente les quantités imaginaires par des grandeurs géométriques. Dans un plan, marquons un point fixe o et traçons une droite ou axe fixe ox; une quantité imaginaire $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ sera représentée par une longueur om égale au module r, et portée dans une direction qui fasse avec l'axe ox un angle égal à l'argument θ. Si l'on conçoit que le point m décrive dans le plan une courbe continue, cette courbe figurera la variation continue de la quantité imaginaire z. La grandeur géométrique om' étant la somme des deux grandeurs géométriques om et mm', on dira que la corde mm' est la variation de z quand on passe du point m au point m'.

Fig. 1.



Nous savons (n° 145) que le module d'une quantité imaginaire est parfaitement déterminé, mais que l'argument peut être augmenté ou diminué d'un multiple quelconque de 2π. Lorsque la variable z décrit une courbe, le module varie d'une manière continue; nous ferons varier aussi l'argument d'un manière continue; ainsi, du point m au point voisin m', la variation de l'argument sera l'angle très-petit mom'. Quand la variable revient au point de départ m après avoir décrit une courbe fermée, le module reprend sa valeur primitive; mais l'argument peut avoir été augmenté ou diminué de 2π, ou d'un multiple de 2π. Si la courbe fermée ne comprend pas l'o-

Fig. 2.

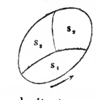


rigine o (fig. 1), il est évident que l'argument reprend en m sa valeur primitive; mais si la courbe enveloppe l'origine, comme le représente la figure 2, le rayon om ayant fait un tour entier, l'argument a été augmenté de 2π.

Il est clair que, lorsque la variable parcourt une même ligne dans deux sens opposés, les variations de l'argument sont égales et de signes contraires. Par exemple, si la variable décrit l'arc mm' (fig. 1) dans un sens, puis le même arc $m'm$ en sens inverse, les variations de l'argument sont égales à l'angle mom', pris d'une part avec le signe $+$, d'autre part avec le signe $-$.

Si l'on partage une aire plane s en plusieurs parties s_1, s_2, s_3 (fig. 3) par des transversales rectilignes curvilignes, la variation de l'argument relative au contour de l'aire s est égale à la somme des variations de l'argument relatives aux contours des aires partielles s_1, s_2, s_3. Car chaque transversale étant parcourue dans deux sens opposés, les variations fournies par ces transversales sont égales deux à deux et de signes contraires, et il ne reste que la variation produite par le contour de l'aire s. On suppose que les contours de toutes les aires s_1, s_2, s_3 sont parcourus par le mobile dans le même sens.

Fig. 3.



253. Ces principes nous serviront à étudier les propriétés d'une fonction entière, quand on donne à la variable z des valeurs imaginaires. Considérons d'abord un polynôme entier ne renfermant pas de terme constant

$$Az + Bz^2 + Cz^3 + \ldots\ldots$$

Appelons a, b, c, ..., les modules des coefficients, r le module de la variable z; le module d'une somme de quan-

tités imaginaires étant moindre que la somme des modules de ces quantités (n° 148), le module du polynôme est plus petit que

$$ar + br^2 + cr^3 + \ldots\ldots$$

Mais on peut donner à la variable réelle r une valeur assez petite r_1, pour que ce dernier polynôme ait une valeur plus petite qu'une quantité donnée α, si petite qu'elle soit; pour toutes les valeurs de z ayant un module inférieur à r_1, le polynôme proposé aura un module plus petit que α.

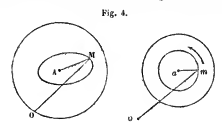
Considérons maintenant une fonction entière quelconque $u = f(z)$. Si l'on donne à la variable z un accroissement h, la fonction éprouve un accroissement

$$k = hf'(z) + \frac{h^2}{1.2} f''(z) + \ldots\ldots$$

On peut rendre le module de h assez petit pour que le module de k soit plus petit que toute quantité donnée; ainsi, à une variation infiniment petite de la variable correspond une variation infiniment petite de la fonction; on en conclut que la fonction entière varie d'une manière continue avec la variable.

254. La fonction u est une nouvelle quantité imaginaire que nous représenterons par une grandeur géométrique comme la variable z. Afin d'éviter la confusion, nous figurerons ces deux variables sur deux plans différents. Soit

Fig. 4.



o (fig. 4) l'origine de la grandeur géométrique om qui, sur le premier plan, représente la variable z, O l'origine de la grandeur géométrique OM qui, sur le second plan, représente la fonction u. A chaque valeur de z correspond une valeur de u et une seule; ainsi à chaque point m du premier plan correspond un point déterminé M du second plan. Quand le point m décrit une courbe continue, le point M décrit aussi une courbe continue. Si le point m revient à sa position primitive, après avoir décrit une courbe fermée, le point M revient aussi à sa position primitive.

Donnons à z une valeur particulière z_0 figurée par la longueur oa; à cette valeur correspond une valeur u_0 de la fonction figurée par la longueur OA. Nous supposons la valeur u_0 différente de zéro. Faisons $z = z_0 + h$, $u = u_0 + k$. On peut, comme nous l'avons dit, assigner un module r_1 tel que pour toutes les valeurs de h dont le module est égal ou inférieur à r_1, le module de k soit moindre que la longueur OA, c'est-à-dire moindre que le module de u_0. Les nouvelles variables h et k sont figurées par les droites am et AM qui tournent autour des points fixes a et A. Si le point m décrit une courbe fermée comprise dans le cercle décrit du point a comme centre avec un rayon égal à r_1, le point M décrira aussi une courbe fermée comprise dans le cercle décrit du point A comme centre avec un rayon égal à AO. En suivant le mouvement de la droite OM qui représente la fonction u, on voit que l'argument de cette fonction reprend en M sa valeur primitive.

255. Supposons maintenant que la quantité z_0 soit racine du polynôme et de l'ordre n de multiplicité, c'est-à-dire que le polynôme $f(z)$ soit divisible par $(z - z_0)^n$. Posons

$$f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z),$$

ou

$$u = h^n \varphi(z_0 + h).$$

Nous pouvons assigner un module r_1 tel que, pour toutes les valeurs de h dont le module est égal ou inférieur à r_1, le module de $\varphi(z_0 + h) - \varphi(z_0)$ soit moindre que le module de $\varphi(z_0)$. Faisons

$$h = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

d'où

$$h^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta).$$

La fonction u étant égale au produit des deux facteurs h^n et $\varphi(z_0 + h)$, son argument est la somme des arguments de ces deux facteurs.

Concevons que le point m décrive autour du point a une courbe fermée comprise dans le cercle r_1, et, pour plus de précision, faisons décrire à ce point une circonférence de cercle ayant le point a pour centre et un rayon r plus petit que r_1; la droit am, qui représente la variable h, décrivant autour du point a le cercle entier, l'argument θ de cette variable augmente de 2π, et par conséquent l'argument $n\theta$ de h^n augmente de $2n\pi$. Il résulte d'ailleurs de ce qui précède que l'argument de $\varphi(z_0 + h)$ reprend sa valeur primitive. On en conclut de là que l'argument de la fonction u éprouve une augmentation égale à $2n\pi$.

256. Quand la variable z décrit une même ligne dans deux sens opposés, la fonction u décrit aussi une même ligne dans deux sens opposés; car, si la variable z va de m en m', puis rétrogade de m' en m la fonction u va de M en M', puis rétrogade de M' en M pour revenir à sa valeur primitive; l'argument de la fonction u éprouve donc deux variations égales et de signes contraires.

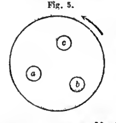
Concevons que la variable z décrive le contour d'une aire

plane quelconque s (fig. 3); partageons cette aire en plusieurs parties s_1, s_2, s_3, ..., par des transversales rectilignes ou curvilignes, et concevons que la variable dérive le contour de chacune de ces aires partielles dans le même sens. Quand la variable z décrit le contour d'une aire plane, la fonction u décrit aussi une courbe fermée, et son argument éprouve une certaine variation. Chacune des transversales étant parcourue par la variable z dans deux sens opposés, les variations correspondantes de l'argument de la fonction sont égales et de signes contraires. On en conclut que la variation de l'argument de la fonction relative au contour de l'aire s est égale à la somme des variations relatives aux aires partielles s_1, s_2, s_3......

257. Supposons d'abord que l'aire considérée ne comprenne aucune racine du polynôme $f(z)$. On peut la diviser en parties assez petites pour que l'on puisse appliquer à chacune d'elles les conclusions du n° 254. La variation relative à chaque partie étant nulle, la variation relative à l'aire totale est nulle.

Supposons maintenant que l'aire plane s comprenne une ou plusieurs racines du polynôme, par exemple une racine $z = a$ du degré n de multiplicité, une racine $z = b$ du degré n', etc. Marquons à l'intérieur de l'aire des points a, b, c, ..., qui correspondent à ces racines (fig. 5). Autour de ces points comme centres décrivons des cercles très-petits. La partie de l'aire s extérieure à ces cercles ne comprenant pas de racine, la variation correspondante de l'argument de la fonction est nulle; il reste à considérer les cercles eux-mêmes. La variation relative au cercle a, d'après ce que

Fig. 5.





nous avons dit au n° 255, est $2n\pi$; la variation relative au cercle b est $2n'\pi$, etc. La variation relative à l'aire s est la somme de ces variations partielles, c'est-à-dire

$$2(n+n'+n''+\ldots\ldots)\pi.$$

On en conclut le théorème suivant dû à l'illustre Cauchy : *Le nombre des racines d'un polynôme entier comprises dans une aire plane donnée est égal à la variation qu'éprouve l'argument du polynôme quand la variable décrit le contour de l'aire, cette variation étant divisée par 2π.*

Il est clair que l'on compte chaque racine avec son degré de multiplicité.

258. De l'origine o comme centre, décrivons un cercle avec un rayon r assez grand pour que ce cercle comprenne toutes les racines du polynôme $f(z)$. La variation qu'éprouvera l'argument du polynôme quand la variable z décrira la circonférence de ce cercle donnera le nombre total des racines du polynôme. Soit m le degré du polynôme que nous ordonnons par rapport aux puissances décroissantes de z

$$u = Az^m + Bz^{m-1} + Cz^{m-2} + \ldots\ldots;$$

nous pouvons écrire ce polynôme sous la forme

$$u = z^m\left(A + B\frac{1}{z} + C\frac{1}{z^2} + \ldots\ldots\right)$$

ou

$$x = z^m(A + Bz' + Cz'^2 + \ldots\ldots) = z^m\varphi(z'),$$

en posant $z' = \frac{1}{z}$. Quand on fait décrire à la variable z le cercle de rayon r, la nouvelle variable z' décrit un cercle de rayon $\frac{1}{r}$; à la partie du plan extérieure au premier

cercle correspond la partie du plan intérieure au second cercle. Puisque le polynôme $f(z)$ n'a aucune racine en dehors du premier cercle, le polynôme $\varphi(z')$ n'a aucune de ses racines à l'intérieur du second cercle. L'argument du polynôme $\varphi(z')$ reprend donc sa valeur primitive; ainsi l'argument du polynôme $f(z)$ éprouve la même variation que l'argument de z^m. Si l'on pose

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

on a

$$z^m = r^m(\cos m\theta + i\sin m\theta);$$

on voit que, lorsque la variable z décrit la circonférence de rayon r, l'angle θ augmentant de 2π, l'argument $m\theta$ de z^m augmente de $2m\pi$; telle est la variation de l'argument du polynôme proposé. On en conclut que *tout polynôme entier du degré* m *a* m *racines réelles ou imaginaires.* C'est le théorème fondamental de la théorie des équations.

NOTE C. — *Sur les fonctions symétriques.*

259. On dit qu'une expression renfermant plusieurs lettres est *symétrique* par rapport à ces lettres, lorsqu'elle ne change pas quand on permute deux lettres quelconques. Par exemple les fonctions

$$a^2 + b^2 + c^2,$$
$$ab + ac + bc,$$

sont des fonctions symétriques de trois lettres a, b, c. Nous ne nous occuperons que des fonctions symétriques entières.

Il est clair que, si dans un terme d'une fonction symétrique on permute deux lettres quelconques, on reproduit soit le même terme, soit un autre terme. La fonction symétrique peut se partager en groupes contenant chacun les termes qui se déduisent les uns des autres par la permutation des lettres. Pour abréger, nous n'écrirons qu'un terme de chaque groupe, et nous indiquerons par le signe Σ la somme de tous les termes de même espèce ; on a, par exemple,

$$(a+b+c+\ldots\ldots)^2 = \Sigma a^2 + 2\Sigma ab.$$

Considérons une fonction symétrique entière de m lettres $a, b, c, \ldots, l$. Désignons par S_1 la somme de ces lettres, par S_2 la somme des produits de ces lettres deux à deux, par S_3 la somme des produits trois à trois, etc. ; enfin par S_m le produit des m lettres ; en d'autres termes, posons

$$S_1 = \Sigma a,\quad S_2 = \Sigma ab,\quad S_3 = \Sigma abc, \ldots\ldots,\quad S_m = abc\ldots\ldots l;$$

toute fonction entière symétrique des m lettres peut s'exprimer rationnellement au moyen des m fonctions symétriques particulières que nous venons de définir. Nous empruntons à l'Algèbre de M. Bertrand la démonstration de ce théorème important. Ordonnons la fonction proposée T par ordre *alphabétique* de la manière suivante : Plaçons d'abord les termes qui contiennent la lettre a avec le plus fort exposant α ; parmi ceux-là, ceux qui contiennent la lettre b avec le plus fort exposant β ; parmi ces derniers, ceux qui contiennent la lettre c avec le plus fort exposant γ, et ainsi de suite ; le premier terme du polynôme aura la forme $Aa^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots l^\lambda$, la lettre A désignant un coefficient numérique positif ou négatif, l'exposant β étant égal ou inférieur à α, l'exposant γ égal ou inférieur à β, etc. On peut supposer

que chaque terme contienne toutes les lettres, en affectant de l'exposant zéro les lettres qui manquent. Cela posé, formons le produit

$$A(S_1)^{\alpha-\beta}\times(S_2)^{\beta-\gamma}\times(S_3)^{\gamma-\delta}\times\ldots\ldots\times(S_m)^{\lambda}=P;$$

ce produit est une fonction symétrique homogène des m lettres; le premier terme de $(S_1)^{\alpha-\beta}$ est $a^{\alpha-\beta}$, le premier terme de $(S_2)^{\beta-\gamma}$ est $a^{\beta-\gamma}b^{\beta-\gamma}$, le premier terme de $(S_3)^{\gamma-\delta}$ est $a^{\gamma-\delta}b^{\gamma-\delta}c^{\gamma-\delta}$; enfin, le facteur $(S_m)^{\lambda}$ est $a^{\lambda}b^{\lambda}c^{\lambda}\ldots l^{\lambda}$; le premier terme du produit P est égal au produit des premiers termes des différents facteurs, c'est-à-dire à

$$Aa^{\alpha-\beta}\times a^{\beta-\gamma}b^{\beta-\gamma}\times a^{\gamma-\delta}b^{\gamma-\delta}c^{\gamma-\delta}\times\ldots\ldots\times a^{\lambda}b^{\lambda}c^{\lambda}\ldots\ldots l^{\lambda},$$

ou plus simplement $Aa^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}\ldots\ldots l^{\lambda}$; c'est le premier terme de la fonction T. La différence $T-P=T_1$, qui est une nouvelle fonction symétrique homogène des m lettres et du même degré, ne renferme plus ce premier terme, et le premier terme de T_1 vient après le premier terme de T dans l'ordre alphabétique.

On raisonne ensuite sur la fonction T_1 comme sur la fonction proposée; à l'aide des fonctions S_1, S_2, ..., on formera un produit P_1 dont le premier terme soit le même que celui de T_1; la différence $T_1-P_1=T_2$ sera une nouvelle fonction symétrique homogène ne renfermant plus ce terme, et ainsi de suite. Il est clair qu'après un certain nombre d'opérations, on arrivera à une différence nulle. On a ainsi

$$T-P=T_1,\ T_1-P_1=T_2,\ \ldots\ldots,\ T_\mu-P_\mu=0;$$

d'où l'on déduit

$$T=P+P_1+P_2+\ldots\ldots+P_\mu.$$

La fonction symétrique proposée T est exprimée rationnellement au moyen des fonctions S_1, S_2, ... S_m.

Considérons, par exemple, la fonction Σa^2. Le premier terme étant a^2, on prendra

$$P = S_1^2 = \Sigma a^2 + 2\Sigma ab; \quad \text{d'où} \quad \Sigma a^2 = S_1^2 - 2S_2.$$

Soit encore la fonction Σa^3; le premier terme étant a^3, on prendra

$$P = S_1^3 = \Sigma a^3 + 3\Sigma a^2 b + 6\Sigma abc,$$
$$T_1 = T - P = -3\Sigma a^2 b - 6\Sigma abc.$$

Le premier terme de T_1 étant $-3a^2 b$, on prendra

$$P_1 = -3S_1S_2 = -3(\Sigma a^2 b + 3\Sigma abc),$$
$$T_1 - P_1 = 3\Sigma abc = 3S_3.$$

On en conclut

$$T = P + P_1 + 3S_3 = S_1^3 - 3S_1S_2 + 3S_3.$$

Si les m quantités a, b, c, ..., l sont les racines d'une équation algébrique du degré m,

$$x^m - S_1 x^{m-1} + S_2 x^{m-2} - \ldots\ldots \pm S_m = 0,$$

toute fonction entière symétrique de ces quantités s'exprimera rationnellement au moyen des coefficients de l'équation.

NOTE D. — *Sur l'élimination.*

260. On doit à M. Sylvester une méthode très-élégante pour effectuer l'élimination d'une inconnue entre deux équa-



tions algébriques à l'aide d'un déterminant. Supposons qu'il s'agisse d'éliminer l'inconnue y entre deux équations à deux inconnues x et y. Considérons d'abord le cas simple où les deux équations sont du second degré par rapport à y; soient

$$(1) \qquad \begin{cases} Ay^2 + By + C = 0, \\ A'y^2 + B'y + C' = 0, \end{cases}$$

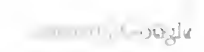
les deux équations, dans lesquelles les lettres A, B, C, A', B', C' désignent des fonctions de x. Si l'on remplace y par $\frac{y}{z}$, les équations prendront la forme homogène

$$(2) \qquad \begin{cases} Ay^2 + Byz + Cz^2 = 0, \\ A'y^2 + B'yz + C'z^2 = 0. \end{cases}$$

En multipliant chacune de ces deux équations par y et par z, on obtient le système des quatre équations

$$(3) \qquad \begin{cases} Ay^3 + By^2z + Cyz^2 = 0, \\ A'y^3 + B'y^2z + C'yz^2 = 0, \\ \qquad Ay^2z + Byz^2 + Cz^3 = 0, \\ \qquad A'y^2z + B'yz^2 + C'z^3 = 0. \end{cases}$$

Si les équations (1) sont vérifiées par un système de valeurs attribuées à x et à y, les équations (2) seront vérifiées par la même valeur de x, y et z ayant des valeurs indéterminées; les équations (3), que l'on peut considérer comme un système de quatre équations du premier degré entre les quatre inconnues y^3, y^2z, yz^2, z^3 seront aussi vérifiées par une infinité de valeurs attribuées à ces inconnues; on en conclut que la valeur de x doit annuler le déterminant relatif à ces équations. Si donc on égale le zéro le déterminant



$$\begin{vmatrix} A, & B, & C, & o \\ A', & B', & C', & o \\ o, & A, & B, & C \\ o, & A', & B', & C' \end{vmatrix}$$

on aura l'équation à laquelle doit satisfaire l'inconnue x.

En général, soit m le degré de la première équation et n le degré de la seconde, par rapport à y, en remplaçant y par $\frac{y}{z}$, on mettra les deux équations sous la forme

$$(4)\quad A_0 y^m + A_1 z y^{m-1} + A_2 z^2 y^{m-2} + \ldots\ldots + A_m z^m = o,$$
$$(5)\quad A'_0 y^n + A'_1 z y^{n-1} + A'_2 z^2 y^{n-2} + \ldots\ldots + A'_n z^n = o.$$

Si l'on multiplie ensuite la première équation par y^{n-1}, zy^{n-2}, $z^2y^{n-3}, \ldots, z^{n-1}$, et la seconde par y^{m-1}, zy^{m-2}, $z^2y^{m-3}, \ldots, z^{m-1}$, on formera un système de $n+m$ équations du premier degré entre les $m+n$ inconnues

$$y^{m+n-1}, \quad zy^{m+n-2}, \quad z^2y^{m+n-3}, \quad \ldots\ldots, \quad z^{m+n-1}.$$

En égalant à zéro le déterminant relatif à ce système d'équations du premier degré, on obtiendra l'équation à laquelle doit satisfaire l'inconnue x.

261. On peut à l'aide des fonctions symétriques trouver le degré de l'équation résultante. Supposons que l'équation (4), que nous désignons par $\varphi(y) = o$, soit du degré m par rapport aux deux inconnues x et y, et l'équation (5) du degré n; les lettres A_0 et A'_0 désignent des constantes que nous réduirons à l'unité, les lettres A_1 et A'_1 des polynômes du premier degré en x, les lettres A_2 et A'_2 des polynômes du second degré, etc.; en général l'exposant de z indique le degré de chaque coefficient. Concevons que l'on attribue à x une valeur convenable; appelons y_0, y_1,

$y_1, \ldots\ldots y_{m-1}$ les m racines de l'équation (4), et de même $y'_0, y'_1, y'_2, \ldots\ldots y'_{n-1}$ les n racines de l'équation (5) ; pour que les deux équations soient vérifiées simultanément, il faudra que l'une des n racines de la seconde équation vérifie la première, c'est-à-dire que l'une des n quantités

$$\varphi(y'_0),\quad \varphi(y'_1),\quad \varphi(y'_2),\quad \ldots\ldots\quad \varphi(y'_{n-1})$$

soit nulle ; cette condition sera remplie si le produit

$$(6)\qquad \mathrm{P}=\varphi(y'_0)\times\varphi(y'_1)\times\varphi(y'_2)\times\ldots\ldots\times\varphi(y'_{n-1})$$

est nul. Ce produit est une expression rationnelle par rapport aux coefficients de la première équation ; comme c'est une fonction symétrique entière des racines de la seconde équation, on pourra aussi l'exprimer rationnellement au moyen des coefficients de cette seconde équation, ainsi que nous l'avons expliqué dans la note précédente ; en égalant à zéro l'expression rationnelle ainsi obtenue, on aura l'équation à laquelle doit satisfaire l'inconnue x.

Si l'on met $\varphi(y)$ sous la forme

$$\varphi(y)=(y-y_0)(y-y_1)\ldots\ldots(y-y_{m-1}),$$

on voit que le produit

$$\mathrm{P}=(y'_0-y_0)(y'_0-y_1)\ldots(y'_0-y_{m-1})\times(y'_1-y_0)(y'_1-y_1)\ldots$$

est composé de mn facteurs binômes. Concevons maintenant que, dans les deux équations proposées, on remplace z par zt, c'est comme si l'on multipliait par t toutes les racines des deux équations ; les mn facteurs binômes qui composent P seront multipliés par t, et par conséquent le produit lui-même sera multiplié par t^{mn} ; on en con-

clut que les différents termes du polynôme P, tels qu'on les déduit de la forme (6) par les fonctions symétriques, contiendront le facteur z^{mn}; chacun des coefficients des équations (4) et (5) étant par rapport à x d'un degré égal à l'exposant de z, il en résulte que le polynôme P est du degré mn par rapport à x. Ainsi le degré de l'équation résultante est égal au produit des degrés des deux équations proposées.

FIN.





TABLE DES MATIÈRES.

LIVRE PREMIER.

COMPLÉMENT DE CALCUL ALGÉBRIQUE.

LIVRE II.

BINÔME.

LIVRE III.

SÉRIES.

LIVRE IV.

DES LOGARITHMES.

LIVRE V.

DÉRIVÉES.

LIVRE VI.

THÉORIE DES ÉQUATIONS.

APPENDICE.

FIN DE LA TABLE.

Paris. — Imprimé par E. THUNOT et Cie, rue Racine, 26.



A LA MÊME LIBRAIRIE :

BRIOT (Ch.), *professeur de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, maître de conférences à l'École Normale supérieure.* **LEÇONS D'ALGÈBRE** *conformes aux programmes officiels* arrêtés pour l'enseignement des lycées et l'admission aux écoles spéciales. 2 vol. in-8° avec figures. 7 fr. 50

On vend séparément :

LA 1re PARTIE, à l'usage des élèves des classes de troisième et de seconde, des candidats au baccalauréat ès sciences, aux Écoles de la marine et de Saint-Cyr, précédée d'une *Introduction* à l'usage des élèves de la classe de troisième, 6e *édit.* 1 vol. in-8°, avec fig. 3 fr. 50 c.

LA 2e PARTIE (Classe de spéciales et candidature aux écoles Polytechnique et Normale supérieure) 6e *édit.* In-8°, av. fig. 1867. 4 fr. 50 c.

— Cours de **COSMOGRAPHIE**, ou **ÉLÉMENTS D'ASTRONOMIE**, comprenant les matières du *nouveau programme* arrêté pour l'enseignement des lycées et l'admission aux écoles spéciales. 1 beau vol. in-8°, avec 94 fig. dans le texte, et 3 pl. dont deux gravées à l'*aqua-tinta*. 4e *édit.*, revue et augmentée. Paris, 1867. 6 fr.

— **COMPLÉMENT DE LA GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE** de MM. BRIOT et BOUQUET, leçons faites par M. BRIOT aux élèves de l'École normale et rédigées par eux. Prix. 5 fr.

— **LEÇONS DE MÉCANIQUE** conformes aux programmes officiels à l'usage des élèves des classes de mathématiques spéciales et des candidats à l'École polytechnique et à l'École normale. In-8°, avec fig. Prix. 5 fr.

BOUTAN, *prof. au lycée St-Louis*, et d'**ALMEIDA**, *prof. au lyc. Napoléon.* **COURS ÉLÉMENTAIRE DE PHYSIQUE**, suivi de problèmes, 3e *édit.*, entièrement revue et considérablement augmentée. 2 beaux vol. gr. in-8, avec 800 fig. et un spectre solaire intercalés dans le texte.
Prix broché. 12 fr.
Relié. 15 fr.

BRAHY, *docteur ès sciences, profess. à l'Athénée royal de Bruges.* **EXERCICES MÉTHODIQUES DE CALCUL DIFFÉRENTIEL.** In-8. 5 fr.

CATALAN, *doct. ès sciences, agrégé de l'Université*, etc. **THÉORÈMES ET PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.** *Nouv. édit.*, revue et augmentée. 1 beau vol. in-8, avec 15 pl. Paris. 7 fr. 50 c.

— Traité élémentaire de **GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE**, renfermant toutes les matières exigées pour l'admission à l'École Polytechnique, *nouv. édit.*, 2 parties. In-8°, avec atlas de 28 pl. Paris. 7 fr. 50 c.

On vend séparément :

1re PARTIE. *La ligne droite et le plan, nouv. édition*, in-8° avec 11 pl. 4 fr.

2e PARTIE. *Problèmes sur les surfaces*, in-8°, et atlas de 17 pl. 4 fr.

DEBRAY, *examinateur d'admission à l'École polytechnique.* **COURS ÉLÉMENTAIRE DE CHIMIE**, suivi de problèmes, 2e *édit.*, revue et augmentée. 1 beau vol. gr. in-8, avec nombreuses figures dans le texte. Prix broché. 7 fr.
Relié. 9 fr.

EUDES (A.), *prof. au lycée Napoléon.* **ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE**, comprenant la géométrie pure et appliquée, ouvrage conforme au nouveau programme et aux instructions ministérielles de 1854. 2 parties in-8°, avec 442 fig. dans le texte et 3 pl. gravées. Paris. 6 fr. 25

On vend séparément :

LA GÉOMÉTRIE PURE. 1 vol. in-8°, avec 34[illegible]

LA GÉOMÉTRIE APPLIQUÉE. 1 vol. in-8°, [illegible] 98 fig. et 3 pl. gravées. 2 f[illegible]

LENGLIER (Ch.), *ancien élève de l'École p[illegible] technique, professeur au lycée de Versai[illegible]* **COURS D'ARITHMÉTIQUE**, suivi de notions [illegible]mentaires d'algèbre. Ouvrage rédigé d'a[illegible] l'instruction générale sur l'exécution du [illegible] d'étude des lycées impériaux, et contenan[illegible] énoncés de 560 problèmes dont les don[illegible] ont été prises pour la plupart dans des p[illegible]cations officielles. 1 vol. in-12. 2 [illegible]

NAVIER, *de l'Institut, profes. à l'École Polyt[illegible]nique*, etc. Résumé des leçons d'**ANALYSE** [illegible]nées à l'École Polytechnique. 2e *éd.* revue et [illegible] notée par M. LIOUVILLE, *de l'Institut, prof[illegible] l'École Polytechnique*, etc. 2 vol. in-8°, pl. P[illegible]

OLIVIER (TH.), *doct. ès sciences, profes.-di[illegible] du Conservatoire des arts et métiers, pro[illegible] fondat. de l'École centrale des arts et manu[illegible]tures*, etc. **TRAITÉ COMPLET DE GÉOMÉT[illegible] DESCRIPTIVE**, ouvrage divisé en plusieurs [illegible]ties, qui se vendent chacune séparément.

1° **COURS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE** ; 2e [illegible] 2 parties in-4°, accompagnées d'un atlas [illegible] 97 pl. 2[illegible]

On vend séparément :

LA 2e PARTIE, **COURBES ET SURFACES COUR[illegible]** Prix. 12 fr.

2° **DÉVELOPPEMENTS DE GÉOMÉTRIE DESCR[illegible]TIVE.** 2 vol. in-4°, dont un de pl. 1[illegible]

3° **COMPLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPT[illegible]** 2 vol. in-4°, dont un de pl. [illegible]

4° **MÉMOIRES DE GÉOMÉTRIE DESCRIPT[illegible]** théorique et appliquée. 2 vol. in-4°, dont u[illegible] planches. [illegible]

5° **APPLICATIONS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPT[illegible]** aux ombres, à la perspective, à la gnomoni[illegible] et aux engrenages. 2 vol. in-4°, dont un de 5[illegible] doubles, dont plusieurs coloriées ou à l'*aq[illegible] tinta.* 2[illegible]

ROGUET (CH.), *profes. de mathém.* **LEÇONS [illegible] GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE** à deux et à trois [illegible]mensions, avec une introduction renferm[illegible] les premières notions sur les courbes usue[illegible] à l'usage des candidats à l'école Polytechni[illegible] à l'École normale et au baccalauréat ès scien[illegible] ouvrage entièrement conforme aux program[illegible] officiels de l'enseignement scientifique des [illegible]cées. 2e *édition.* In-8°, fig. dans le texte. 7 f[illegible]

— **LEÇONS DE TRIGONOMÉTRIE** rectiligne et s[illegible]rique, à l'usage des candidats au baccalau[illegible] ès sciences et aux écoles spéciales du g[illegible]vernement. 3e *édit.*, entièrement refondue [illegible] rédigée conformément au programme offi[illegible] de l'enseignement scientifique des lycées. In[illegible] avec fig. dans le texte. Paris, 2 f[illegible]

SIMON, *doct. ès sciences, profes. au lycée Lo[illegible] le-Grand.* **LEÇONS DE MÉCANIQUE ÉLÉM[illegible]TAIRE.** Gr. in-8, avec figures. Prix. 5 f[illegible]

STERN (le docteur M. A.), *profes. à l'Univer[illegible] de Gottingue.* **RÉSOLUTION DES ÉQUAT[illegible] TRANSCENDANTES.** Ouvrage couronné p[illegible] Société des sciences de Danemark ; tradu[illegible] annoté par **E. LÉVY**, *agrégé des sciences.* I[illegible] avec fig. dans le texte. Paris. 1 f[illegible]

Paris. — Imprimé par E. THUNOT et Ce, rue Racine, 26.



